

**Exercice 1 : (★)**

Remarquer que  $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$ .

**Exercice 2 : (★)**

Utiliser l'application :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{x\}. \end{aligned}$$

**Exercice 3 : (★★)**

1. Utiliser l'application :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow f(E) \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

2. Remarquer que  $f$  surjective signifie  $f(E) = F$ .

3. Remarquer que si  $f$  est injective alors  $\begin{matrix} E &\rightarrow & f(E) \\ x &\mapsto & f(x) \end{matrix}$  est bijective.

**Exercice 4 : (★)** Ecrire  $E$  comme une union d'ensemble disjoints.

*Solution :*  $\frac{n(n+1)}{2}$

**Exercice 5 : (★★)**

On a :  $E = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$  et il s'agit de réunions disjointes. Donc :

$$\begin{aligned} \text{Card}(E) &= \text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(X \cap \bar{Y}) \\ &\quad + \text{Card}(\bar{X} \cap Y) + \text{Card}(\bar{X} \cap \bar{Y}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(E) &= \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap \bar{Y}) \\ &\quad + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(\bar{X} \cap Y) + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(\bar{X} \cap \bar{Y}). \end{aligned}$$

De plus, en effectuant le changement de variable  $Z = \bar{Y}$ , on a :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap \bar{Y}) = \sum_{(X,Z) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Z) = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y).$$

En raisonnant de même sur les autres sommes, on a :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(E) = 4 \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y).$$

De plus :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(E) = \text{Card}(E) \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} 1 = \text{Card}(E) \cdot (2^n)^2.$$

Conclure.

*Solution :*  $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) = n2^{2(n-1)}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cup Y) &= \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X) + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(Y) \\ &\quad - \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} 1 = 2^n \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X)$$

Conclure en utilisant le résultat de l'exercice 8 (qu'il faut redémontrer ici).

*Solution :*  $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cup Y) = 3n2^{2(n-1)}$ .

**Exercice 6 : (★★)**

Raisonnement par récurrence et utiliser le fait qu'il y a deux types de parties à  $k$  éléments dans  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  : celles qui contiennent  $n+1$  et celles qui ne le contiennent pas.

**Exercice 7 :** 

1. Se ramener à l'ensemble  $E \setminus \{a, b\}$ .

*Solution :*  $2^{n-2}$

2. Déterminer le nombre de parties de  $E$  ne contenant pas  $a$ .

*Solution :*  $2^{n-1}$

**Exercice 8 : (★★)**

Effectuer le changement de variable  $Y = \bar{X}$ .

**Exercice 9 :** 

1. *Solution :*  $\frac{15!}{10!} = 360360$  tirages possibles

2. Choisir d'abord les boules blanches et les boules noires puis les placer.

*Solution :*  $\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3} \cdot 5! = 144000$  tirages possibles

**Exercice 10:** 

1. *Solution* :  $9^6$
2. *Solution* :  $\frac{9!}{3!}$
3. *Solution* :  $5 \times 9^5$
4. *Solution* :  $2^6$

**Exercice 11:** (★★)

1. (a) *Solution* :  $\frac{n!}{(n-k)!}$  tirages possibles  
 (b) Ce la revient à tirer sans remise et en tenant compte de l'ordre  $k-1$  boules parmi  $n-1$ .  
*Solution* :  $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$  tirages possibles
2. (a) *Solution* :  $n^k$  tirages possibles  
 (b) Choisir les deux boules, puis dénombrer les possibilités contenant au plus ces deux boules.  
*Solution* :  $n(n-1)(2^{k-1} - 1)$  tirages possibles

**Exercice 12:** 

1. *Solution* :  $\binom{15}{5}$  tirages possibles
2. *Solution* : 1200 tirages possibles

**Exercice 13:** 

1. *Solution* :  $\binom{32}{5}$  mains
2. *Solution* :  $4 \cdot \binom{28}{4}$  mains
3. Utiliser le complémentaire.  
*Solution* :  $\binom{32}{5} - \binom{28}{5}$  mains
4. Utiliser le complémentaire.  
*Solution* :  $\binom{32}{5} - 2 \cdot \binom{28}{5} + \binom{24}{5}$  mains

**Exercice 14:** (★)

1. *Solution* :  $8 \times 28$  mains
2. *Solution* :  $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 24$  mains

3. *Solution* :  $8 \times \binom{4}{2} \times 7 \times \binom{4}{3}$  mains

4. *Solution* :  $8 \times \binom{4}{3} \times \text{parmi } 27 \times 4^2$  mains

**Exercice 15:** (★)

1. Choisir un élément de  $A$  puis les autres éléments dans  $E \setminus A$ .

*Solution* :  $p \binom{n-p}{k-1}$

2. Dénombrer les parties ne contenant aucun élément de  $A$ .

*Solution* :  $\binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$

**Exercice 16:** (★)

Choisir les 4 antécédents puis se ramener à une bijection.

*Solution* :  $\frac{n(n+3)!}{24}$

**Exercice 17:** (★)


Choisir les 3 antécédents, puis les deux antécédents puis se ramener à une bijection.

*Solution* :  $\frac{n(n-1)(n+3)!}{12}$

**Exercice 18:** (★★)

Choisir  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , puis  $Z$  partie de  $E$  à  $p$  éléments, puis  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , puis  $Y$  partie de  $Z$  à  $k$  éléments, puis  $X \in \mathcal{P}(Y)$ .

*Solution* :  $4^n$

**Exercice 19:** (★★) 

- Les partitions en deux éléments sont de la forme  $(A, \overline{A})$  avec  $A \neq \emptyset$  et  $A \neq E$ . Pour le choix du couple  $(A, \overline{A})$ , il y a donc  $2^n - 2$  possibilités. Il faut diviser par  $2! = 2$  pour ne pas prendre en compte l'ordre.

*Solution* : Le nombre de partitions de  $E$  en deux parties est  $2^{n-1} - 1$

- On dénombre les triplets  $(A, B, C)$  formant une partition de  $E$  :

- Choix de  $A$  de cardinal  $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ ,
- Choix de  $B$  tel que  $B \subset E \setminus A$ ,  $B \neq \emptyset$  et  $B \neq E \setminus A$ .
- Choix de  $C$  : 1 possibilité

Soit, au total :  $\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 2)$  possibilités.

Il faut ensuite passer du triplet  $(A, B, C)$  à l'ensemble  $\{A, B, C\}$

*Solution* : Le nombre de partitions de  $E$  en trois parties est  $\frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$