Indications du chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

Exercice 1 :

Solution : Pour u_1 *:* $(1 \dots 1)$ *(matrice à* $n+1$ *colonnes), pour* u_2 *:* $\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\dots\frac{1}{n+1}\right)$*, pour* u_3 *:* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, pour* u_4 *:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Solution : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (⋆)

Solution : $\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$

Exercice 4 : (⋆⋆)

Considérer $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i-1}(x) = 0$ et appliquer f^{n-1} à cette égalité pour en déduire que $\lambda_1 = 0$. Réitérer cette méthode pour prouver que la famille est libre.

Solution : $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : (⋆⋆)

Remarquer que $f(e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta e_i\right) + (\alpha - \beta) e_j$.

En déduire $f(e'_j)$ en fonction des (e_i).

En remarquant que $e_j = e'_j - e'_{j-1}$ si $j \neq 1$, en déduire $f(e'_j)$ en fonction des (e'_i).

Conclure.

Solution : $\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & 2\beta & \dots & (n-1)\beta & \alpha-\beta+n\beta \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Pour le calcul de l'inverse, remarquer que $f \circ f = Id$.

Solution : $A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : (⋆)

1. Montrer que u est linéaire et étudier son noyau.
2. Calculer l'inverse de la matrice de u dans les bases canoniques.

   Solution : $\begin{array}{rccl} u^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b,c) & \mapsto & a + \left(-\frac{3}{2}a + 2b - \frac{1}{2}c\right)X + \left(\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c\right)X^2 \end{array}$

Exercice 8 : (⋆)

1. *Solution :* $M = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 6a & 6b \\ 0 & 0 & 12a \end{pmatrix}$
2. f soit bijective ssi A est inversible.
   Solution : $\deg(A) = 2$.

Exercice 9 : (⋆⋆)

1. Utiliser les définitions et la formule du binôme de Newton.
   Solution : La matrice de f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est* A.

2. Exhiber (en le vérifiant) l'application réciproque de f et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Solution : $A^{-1} = (b_{i,j})$ *avec :*

$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!]\,,\; b_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

Exercice 10 : $(\star\star)$
Solution : $\ker f = Vect(1,1,1)$, *Im* $f = Vect((2,-1,-1),(-1,2,-1))$. *La matrice de f dans la base* $((1,1,1),(2,-1,-1),(-1,2,-1))$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *qui est la compoée de l'homothétie vectorielle de rapport 3 et de la projection sur* $\mathrm{Im} f$ *parallèlement à* $\ker f$.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Exercice 11 :

1. *Solution :* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. *Solution :* $\ker A = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *et* $Im\, A = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. *Solution :* $\ker f = Vect(X, X^3)$ *et* $Im\, f = Vect(1, X^2)$.

Exercice 12 : $(\star)$

1. Utiliser les définitions.
Solution : $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\ker A$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $Im\, A$.
2. Utiliser les bases canoniques.
Solution : $((3,1,1))$ *est une base de* $\ker u$, $\left(-X+1, X^2+X-3\right)$ *est une base de* $Im\, u$.

Exercice 13 : Utiliser les définitions.
Solution : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\ker A$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $Im\, A$, $rg\, A = 2$.

Exercice 14 : $(\star)$
Utiliser le critère d'inversibilité des matrices triangulaires.
Solution : $rg(u + \lambda v) = 4$ *si* $\lambda \neq -1$ *et* $rg(u + \lambda v) = 3$ *si* $\lambda = -1$.

Exercice 15 : $(\star)$
Pour $a \neq 1$ effectuer les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_n$ puis $C_n \leftarrow C_n - \frac{a}{1-a}\sum_{j=1}^{n-1} C_j$.

Solution : $rg(A) = 1$ *si* $a = 1$, $rg(A) = n-1$ *si* $a = -\frac{1}{n-1}$ *et* $rg(A) = n$ *sinon.*

Exercice 16 : $(\star\star\star)$
Si f est un endomorphisme de rang 1, utiliser u tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
Solution : Les matrices carrées de rang 1 sont les matrices de la forme XY^T *où* $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. *La puissance k de M matrices carrées de rang 1 est de la forme* $\alpha^{k-1}M$ *où* $\alpha \in \mathbb{K}$.

III Changements de bases

Exercice 17 :
Passer par la base canonique.
Solution : $\begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 18 : $(\star)$
Se placer dans une base formée de vecteurs de $\ker p$ et $\mathrm{Im}\, p$ puis utiliser les formules de changement de base.
Solution : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 19 : $(\star)$

1. Utiliser les degrés des polynômes.
2. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *Solution :* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 20 : ($\star$)

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre.
2. *Solution :* $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et utiliser un changement de base.
   Solution : $f^n : (x,y,z) \mapsto ((n+1)x + ny - nz, y, nx + ny + (1-n)z)$

Exercice 21 : ($\star$)

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre.
2. *Solution :* $Mat_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. *Solution :* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. En calculant B^2, remarquer que $B^4 = I_3$.
   Solution : $A^{4n} = I_3$.

Exercice 22 : ($\star\star$)

1. (a) Utiliser le lien entre $f(x)$ et AX.
   Solution : $f(x,y,z) = (12x + 6y, -20x - 10y, -6x - 3y - z)$
   (b) *Solution :* $((1,-2,0))$ *est une base de* $Ker f$ *et* $((6,-10,-3),(0,0,-1))$ *est une base de* $Im f$.
   (c) Remarquer que $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$.
   Solution : A n'est pas inversible.
2. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est libre et utiliser la dimension.
   (b) Déterminer P en utilisant la définition d'une matrice de passage et remarquer que $Q = P^{-1}$.
   Solution : $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.
   Solution : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (d) Utiliser la formule de changement de base.
   (e) *Solution :* $A^n = \begin{pmatrix} 3.2^{n+1} & 3.2^n & 0 \\ -5.2^{n+1} & -5.2^n & 0 \\ -2^{n+1} + 2.(-1)^n & -2^n + (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$
   (f) *Solution :* $f^n(x,y,z) = (3.2^{n+1}x + 3.2^n y, -5.2^{n+1}x - 5.2^n y, (-2^{n+1} + 2.(-1)^n)x + (-2^n + (-1)^n)y + (-1)^n z)$

Exercice 23 : ($\star\star$)

1. Expliciter les noyaux.
   Solution : $((1,1,1))$ *est une base de* $Ker(u - id_E)$, $((4,3,-2))$ *est une base de* $Ker(u - 2id_E)$, $((2,-3,2))$ *est une base de* $Ker(u + 4id_E)$.
2. Montrer que la famille est libre et utiliser la dimension.
3. Exprimer les images de e_1, e_2, e_3 en fonction de de e_1, e_2, e_3 puis utiliser les formules de changement de base.
   Solution : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 : ($\star\star$)

1. Remarquer que $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ et utiliser le vecteur du rang.
2. Prendre (e_2) base de $\mathrm{Im} f$, poser $f(e_1) = e_2$ compléter pour que (e_2, e_3) soit une base de $\ker f$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Exercice 25 : ($\star\star$)

1. *Solution :* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Solution :* $ker f = Im f = Vect(1, X)$
3. On cherche $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec $P_1, P_2 \in \ker(P)$ et $f(P_3) = P_1$, $f(P_4) = P_2$.
   Solution : On peut choisir $P_3 = X^2$, $P_4 = X^3$, $P_1 = f(P_3) = 2$ *et* $P_2 = f(P_4) = 6X + 6$.

Exercice 26 : ($\star\star$)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Chercher une base de l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ puis, si $f(x_0) = x_0$, résoudre $f(x) = x_0 + x$. Pour le calcul de puissances, utiliser les formules de changement de base et la formule du binôme de Newton.

Solution : $A^n = \begin{pmatrix} n-1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$

Exercice 27 : ($\star\star$)

Si $\mathrm{rg}(A) = r$, utiliser les formules de changement de base pour l'application linéaire f canoniquement associé à A en prenant comme base de $\mathbb{K}^p$: $(e_1, \dots, e_p)$ avec $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ base de $\ker f$ et comme base de $\mathbb{K}^n$: $(f(e_1), \dots, f(e_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$.