Indications du chapitre 19 : Applications linéaires

I Généralités

Exercice 1 :
Solution : f_1 est linéaire
Utiliser $f_2((1,0)+(0,1))$.
Solution : f_2 n'est pas linéaire
Solution : f_3 est linéaire
Solution : f_4 est linéaire

Exercice 2 :
Solution : $((1,1))$ *est une base de* $\ker f$ *et* $((1,-1,0))$ *est une base de* $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3 : (⋆)
Pour le noyau, raisonner par coefficients indéterminés. Pour l'image, utiliser l'image d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est une famille génératrice de l'image.
Solution : $(X+1)$ *est une base du noyau,* $(1, X^2+2X, 2X^3+3X^2)$ *est une base de l'image.*

Exercice 4 : (⋆)

1. *Solution :* $((1,1,1))$ *est une base de* $\ker f_1$ *et* $((1,-1,0),(0,-1,1))$ *est une base de* $\mathrm{Im} f_1$.
2. *Solution :* $(1-i)$ *est une base de* $\ker f_2$ *et* $(1+i)$ *est une base de* $\mathrm{Im} f_2$.

Exercice 5 : (⋆)
Montrer que φ est injectif en étudiant son noyau et en calculant la dérivée de g.
Pour l'étude de la surjectivité, remarquer que g est dérivable.
Solution : φ *est injectif et n'est pas surjectif.*

Exercice 6 : (⋆)

1.
2. Montrer que $\ker(f) = \{0\}$ en raisonnant sur les degrés.

Exercice 7 : (⋆)
Raisonner par analyse-synthèse en remarquant que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$.
Solution : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (y, x-y+z)$,
$\ker(f) = \mathrm{Vect}(1,0,-1)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Exercice 8 :
Solution : 3

Exercice 9 : (⋆)
Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g$.
Appliquer l'inégalité obtenue précédemment à $f+g$ et à $-g$.

II Endomorphismes

Exercice 10 : (⋆)

- Montrer que $\mathrm{Ker}(f-2Id_E) \cap \mathrm{Ker}(f-3Id_E) = \{0_E\}$ sans utiliser l'hypothèse.
- Soit $x \in E$. On cherche à écrire x comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f-2Id_E)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f-3Id_E)$.
  On remarque que $0_E = (f^2-5f+6Id_E)(x) = (f-3Id_E)\circ(f-2Id_E)(x)$. En déduire que $f(x)-2x \in \mathrm{Ker}(f-3Id_E)$.
  De même montrer que : $f(x)-3x \in \mathrm{Ker}(f-2Id_E)$.
  Ecrire x comme combinaison linéaire de $f(x)-2x$ et de $f(x)-3x$ pour conclure.

Exercice 11 : (⋆)

1. Soit $y \in E$, écrire $y = g(z)$ puis décomposer z.
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g\circ f$. Etudier les espaces auxquels appartient $f(x)$.

Exercice 12 : (⋆⋆)
Raisonner par double implication. Les inclusions suivantes sont toujours vraies : $\mathrm{Im} f\circ f \subset \mathrm{Im} f$, $\ker f \subset \ker f\circ f$.

Exercice 13 : (⋆)
Montrer que si $x \in \ker f$, alors $g(x) \in \ker f$ et si $y \in \mathrm{Im} f$, alors $g(y) \in \mathrm{Im} f$

Exercice 14 :

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on peut résoudre le système $(x,y,z) = \lambda e_1 + \mu e_2 + \alpha e_3$ d'inconnues λ, μ, α.
2. *Solution :* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x,y,z) = \left(x-\frac{z}{3}, y-\frac{2z}{3}, 0\right)$
3. *Solution :* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = \left(\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z\right)$

Exercice 15 : ($\star$)

1. On suppose qu'il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.
   (a) Composer la relation donnée à gauche par p puis à droite par p.
   (b) Simplifier $(p \circ u - u \circ p) \circ (p \circ u - u \circ p)$.
2. On suppose que $u^2 = 0$.
   (a)
   (b) Remarquer que, comme $u(x) \in \operatorname{Im} u$, $p(u(x)) = u(x)$ et comme $p(x) \in \operatorname{Im} u$, $u(p(x)) = 0$.

Exercice 16 : ($\star\star$)

1. Montrer d'abord que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $q \circ p = -p \circ q$ puis composer à gauche et à droite cette relation par p.
2. Raisonner par double inclusion.

Exercice 17 : ($\star\star$)

1. Montrer que $r \circ r = r$ en utilisant $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.
2.
   - L'inclusion $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$ est évidente.
   - Soit $x \in \operatorname{Ker} r$, alors $r(x) = 0_E$. En déduire que $p(x) = q(p(x)) - q(x)$, appliquer p pour avoir : $p(x) = p(p(x)) = \cdots = 0_E$.
     En déduire, en utilisant $r(x) = 0_E$ que $q(x) = 0_E$ et conclure.
   - Montrer que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$ en remarquant que si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$ et en utilisant $p \circ q = 0$.
   - Si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $p(x_1) = x_1$ et $q(x_2) = x_2$, montrer que $p(x_2) = 0_E$ et en déduire que $r(x) = x$ et donc que $x \in \operatorname{Im} r$.
   - Si $x \in \operatorname{Im} r$, remarquer que $x = r(x) = p(x) + q(x - p(x))$ et conclure.

III Applications linéaires en dimension finie

Exercice 18 :

Montrer que $E = F \oplus G$ pour montrer l'existence et l'unicité. Pour déterminer f, décomposer tout vecteur de E dans $F \oplus G$.
Solution : $f(x, y, z) = (2x - 3y, -y, -z)$

Exercice 19 : ($\star$)

Montrer que l'espace vectoriel recherché est de dimension 3 en utilisant un isomorphisme et chercher des suites de la forme : $u_n = r^n$.
Solution : $((1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 20 : ($\star$) En raisonnant sur les degrés, montrer que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 21 : ($\star\star$)

1. Etudier l'injectivité de φ en utilisant les racines des éléments de son noyau.
2. Utiliser l'image réciproque d'une base par un isomorphisme.
   Pour le calcul de L_k, il faut avoir l'intuition de la formule.
   Solution : $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$
3. Evaluer P en $a_1, \dots, a_{n+1}$.
   Solution : $(P(a_1), \dots, P(a_{n+1}))$

Exercice 22 : ($\star\star$)

Montrer que l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$ est bien définie, linéaire et bijective.

Exercice 23 : ($\star\star$)

Montrer que l'application $\mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$, $P \mapsto P(X - \alpha) + P(X - \beta)$ est bien définie, linéaire et bijective.

Exercice 24 : ($\star\star$)

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   Pour prouver que E_p et F_p sont des sous espaces-vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, on peut remarquer que $E_p = E \cap \mathbb{R}_p[X]$ et $F_p = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   Pour prouver que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que $E \cap F_1 = \{0\}$ et utiliser la décomposition $P = (P - P(0)) + P(0)$ pour montrer que $P \in E + F_1$.
2. (a) Ecrire P sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
   Remarquer que $\deg(\Delta(P)) \leq n$.
   Montrer que le coefficient en X^n dans $\Delta(P)$ est nul et que celui en x^{n-1}, pour $n \geq 1$ est non nul.
   Solution : $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ *si* $\deg(P) \geq 1$ *et* $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ *sinon.*
   (b) Remarquer que $P \in \ker\Delta$ ssi $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ et utiliser la question précédente.
   Solution : $\ker\Delta = F_1$
3. On considère l'application $f_p : E_p \to F_p$, $P \mapsto \Delta(P)$.
   - Montrer que f_p est bien définie.
   - En étudiant le noyau, montrer que f_p est injective.
   - En utilisant les dimension, en déduire que f_p est bijecive.
   - Utiliser la surjectivité de f_p pour avoir celle de $\Delta : E \to \mathbb{R}[X]$.

IV Théorème du rang

Exercice 25 :
Remarquer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et appliquer le théorème du rang.

Exercice 26 : $(\star)$
Montrer et utiliser : $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\ker f \subset \ker g \circ f$.
Appliquer le théorème du rang à $g|_{\operatorname{Im} f}$.

Exercice 27 : $(\star\star)$
S'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ le théorème du rang donne immédiatement la conclusion.
Si n est pair, construire une application u sur une base de E et prouver qu'elle convient.

Exercice 28 : $(\star\star)$

- Si u existe, d'après le thèorème du rang : $\dim F + \dim G = n$.
- Si $\dim F + \dim G = n$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de G et $(f_1, \dots, f_{n-p})$ une base de F.
  On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E.
  On définit u comme étant l'unique endomorphisme tel que $u(e_k) = 0$ si $k \leq p$ et $u(e_k) = f_{k-p}$ sinon.
  En utilisant $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$, montrer que $\operatorname{Im} u = F$. Remarquer que $G \subset \ker u$ et utiliser les dimensions pour prouver l'égalité.

Solution : $\dim F + \dim G = n$

Exercice 29 : $(\star\star\star)$

1. Raisonner par l'absurde pour prouver l'injectivité et la surjectivité de f en construisant, pour chaque partie, une fonction g qui ne vérifie pas l'hypothèse.
2. Montrer, en considérant des restrictions, que H est isomorphe à $\mathcal{L}(G,E) \times \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, \ker f)$, où G est un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F.
   Solution : $\dim H = np - r^2$

V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Exercice 30 :
Remarquer que F est le noyau de la forme linéaire : $P \mapsto P(1) - P'(0)$.
Solution : $\dim F = n$

Exercice 31 :
Si $F \neq H$, considérer $a \in F \setminus H$ et utiliser $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$.

Exercice 32 : $(\star)$

1. Utiliser la définition d'une application linéaire.
2. Remarquer qu'il s'agit d'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Solution : $n^2 - 1$

Exercice 33 : $(\star)$ Raisonner par l'absurde.

Exercice 34 : $(\star\star)$ Considérer un vecteur a tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$. Raisonner sur les $x \in H$ et sur a.

Exercice 35 : $(\star\star)$
Montrer que $H_1 + H_2 + E$ et utiliser la formule de Grassmann.
Solution : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$