

Exercices du chapitre 21 : Dénombrement

Exercice 1 : (★)

Soient E et F des ensembles finis. Soit $f : E \rightarrow F$ surjective. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall y \in F, \text{Card } f^{-1}(\{y\}) = p.$$

Montrer que :

$$\text{Card } E = p \cdot \text{Card } F.$$

Ce résultat est lemme des bergers.

Exercice 2 : (★) Soit E un ensemble. Montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini, alors E est fini.

Exercice 3 : (★★)

Soient E et F deux ensembles, soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que si E est fini, alors $f(E)$ est fini et $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Montrer que si E est fini et si f est surjective, alors F est fini et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$ avec égalité si et seulement si f est bijective.
3. Montrer que si f est injective et si $f(E)$ est fini alors E est fini et $\text{Card}(E) = \text{Card}(f(E))$.

Exercice 4 : (★) Déterminer le cardinal de l'ensemble :

$$E = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \geq j\}.$$

Exercice 5 : (★★)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

$$\sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) \text{ et } \sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cup Y).$$

Exercice 6 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'ensembles finis. Montrer que :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{I \in I_k} \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \right),$$

où I_k désigne l'ensemble des parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 7 : 

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$.

1. Quel est le nombre de parties de E ne contenant ni a ni b ?
2. Quel est le nombre de parties de E contenant a ?

Exercice 8 : (★★) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) = n2^{n-1}.$$


On pourra effectuer le changement de variable $Y = \bar{X}$ ou remarquer que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^n \{X \in \mathcal{P}(E), \text{Card } X = k\}$.

Exercice 9 : 

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches et les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.

1. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires dans un ordre quelconque?

Exercice 10 :  Soit E l'ensemble des nombres entiers à 6 chiffres ne contenant pas de 0 dans leur écriture décimale.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de E composés de chiffres différents?
3. Combien y a-t-il d'éléments impairs dans E ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de E ne contenant que des 2 ou des 3?

Exercice 11 : (★★)

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .


1. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne.
 - (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles?
 - (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 1?
2. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne.
 - (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles?
 - (b) Combien y a-t-il de tirages durant lesquels deux numéros exactement sont apparus?

Exercice 12 : 

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches et les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

On tire simultanément 5 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires?

Exercice 13 : 

On considère un jeu de 32 cartes et on suppose qu'une main contient 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains?
2. Combien y a-t-il de mains contenant exactement un as?
3. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as?
4. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as et un roi?

Exercice 14 : (★) On considère un jeu de 32 cartes et on suppose qu'une main de poker contient 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains contenant un carré (4 cartes de la même hauteur)?
2. Combien y a-t-il de mains contenant deux paires uniquement (deux fois exactement deux cartes de la même hauteur, les hauteurs étant différentes)?
3. Combien y a-t-il de mains contenant un full (3 cartes de la même hauteur et 2 cartes de la même hauteur)?
4. Combien y a-t-il de mains contenant un brelan uniquement (3 cartes de la même hauteur et pas de carré ni de full)?

Exercice 15 : (★)

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A une partie de E qui contient p éléments.

1. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant un et un seul élément de A ?
2. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice 16 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal $n+3$ et soit F un ensemble de cardinal n .

Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F telles que l'un des éléments de F admette 4 antécédents?


Exercice 17 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal $n+3$ et soit F un ensemble de cardinal n .

Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F telles que l'un des éléments de F admette 3 antécédents et un autre 2?

Exercice 18 : (★★) Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Exercice 19 : (★★) 

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une famille $(E_k)_{1 \leq k \leq N}$ d'ensembles non vides réalise une partition d'un ensemble E ssi $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$ et les $(E_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont deux à deux disjoints.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de partitions de E en deux parties? En trois parties?