


Exercices du chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

Exercice 1 :  Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$u_1: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) ,$$

$$u_2: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 P(t) dt ,$$

$$u_3: \mathbb{C}_3[X] \rightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) ,$$

$$u_4: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P + P' .$$

Exercice 2 : 

On pose :

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : (★)


Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit :

$$\varphi: \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM .$$

Montrer que φ est un endomorphisme et donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 4 : (★★) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 5 : (★★) 


Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} ,$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définie par : pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e'_j = \sum_{k=1}^j e_k$.

Montrer que \mathcal{B}' est une base de E et former la matrice de f dans \mathcal{B}' .

Exercice 6 :  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ défini par : $f: P \mapsto P(1-X)$ et soit A sa matrice dans la base canonique. Déterminer A^{-1} .

Exercice 7 : (★)

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $u(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ celle de \mathbb{R}^3 .

1. Prouver que u est un isomorphisme.
2. Déterminer u^{-1} .

Exercice 8 : (★)

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose :

$$f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto (AP)'' .$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit bijective.

Exercice 9 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

1. Montrer que l'application :

$$f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1)$$

est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 10 : (★★)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. Démontrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 . En déduire une base de \mathbb{R}^3 réunion d'une base de $\text{Ker } f$ et d'une base de $\text{Im } f$. Ecrire la matrice de f dans cette base. Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Exercice 11 : 

On pose : $f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto 3(P - XP') + X^2P''.$

- Déterminer la matrice A canoniquement associée à f .
- Déterminer $\text{ker } A$ et $\text{Im } A$.
- En déduire $\text{ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 12 : (★) Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ tel que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$.

- Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.
- En déduire $\text{ker } u$ et $\text{Im } u$.

Exercice 13 :  Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Déterminer $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$, $\text{rg}(A)$.

Exercice 14 : (★) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soient u et v les endomorphismes suivants :

$$u: E \rightarrow E \quad v: E \rightarrow E \\ P \mapsto P(X+1) \quad P \mapsto P(X-1)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M_λ la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $u + \lambda v$. Déterminer M_λ et le rang de $u + \lambda v$ en fonction de λ .

Exercice 15 : (★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = a$ sinon, avec $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de A en fonction de a et n .

Exercice 16 : (★★★)

Caractériser les matrices carrées de rang 1 et leurs puissances.

III Changements de bases

Exercice 17 : 

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 , où :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)),$$

$$\mathcal{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)).$$

Exercice 18 : (★) Donner la matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection sur le plan d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\text{Vect}(1, 1, 1)$. Comment vérifier le résultat obtenu?

Exercice 19 : (★)

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

- Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
- Déterminer la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .
- Soit u l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire $u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'$. Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B} puis la matrice de u dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 20 : (★)

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On pose $e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (-1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. En déduire f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 : (★) On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (2, -1, 1), (2, -2, 1))$. On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 4y + 4z, -x - 3y - 3z, 2y + 3z)$$

1. Vérifier que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^{4n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 : (★★)

On considère f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.
(b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
(c) La matrice A est-elle inversible?
2. On pose $e_1 = (1, -2, 0)$, $e_2 = (-3, 5, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.
(a) Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{C} et la matrice de passage Q de \mathcal{C} à \mathcal{B} .
(c) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
(d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{-1}.$$

- (e) Déterminer A^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (f) En déduire f^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23 : (★★)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$, $\text{Ker}(u - 2id_E)$ et $\text{Ker}(u + 4id_E)$ sont de dimension 1 et en donner des bases.
2. Donner e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de chacun des noyaux précédents. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

3. Donner la matrice D de u dans cette base. Justifier qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ (que l'on explicitera) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 24 : (★★)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{rg}(f) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 : (★★)

On pose :

$$f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\text{ker } f$ et $\text{Im } f$.
3. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26 : (★★)

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Exercice 27 : (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $r \leq \min(n, p)$.

On pose :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que :

$$\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow \exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), A = QJ_rP.$$