# Oraux de concours

---

**Exercice 1 : Centrale PC**

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.
2. On suppose maintenant que $f$ dérivable en 0 et que $f(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.
3. Soit $f$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

---

**Exercice 2 : CCP PC**

Déterminer les racines de $P = (X-1)^{2n+1} - 1$. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

---

**Exercice 3 : Mines Ponts PSI**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, avec $f \circ g$ décroissante.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

---