PCSI 1 2025/2026

Exercices du chapitre 10 : Ensembles et applications

I Ensembles

Exercice 1 : (⋆⋆)
Montrer que :

1. $\{x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} = \mathbb{R}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\} = \{0\}$.

Exercice 2 :
Soit E l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-ensembles de E?

1. $A = \{f_1, f_2\}$, où f_1 désigne la fonction constante égale à 1 et f_2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$,
2. $B = \{g_1, g_2\}$, où g_1 désigne la fonction constante égale à 1 et g_2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_2(x) = x^3$,
3. $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(-x) + f(-y)\}$.

Exercice 3 :
Soit E un ensemble, soient A et B des parties de E. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

Exercice 4 :
Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E telles que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que :

$$A \subset B \subset C.$$

Exercice 5 : (⋆)
Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E. Montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

Exercice 6 : (⋆)
Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E. Montrer que :

$$(C \subset A \cup B \text{ et } A \cap C \subset B \text{ et } B \cap C \subset A) \Rightarrow C \subset A \cap B.$$

Exercice 7 : (⋆⋆)
Soit E un ensemble, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ l'équation :

$$X \cap A = B.$$

Exercice 8 : (⋆) Soit E un ensemble non vide et soient A, B et C des sous-ensembles non vides de E. Montrer que :

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C).$$

L'inclusion contraire est-elle vraie?

Exercice 9 : (⋆⋆)
Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E.

1. Montrer que :
$$A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A.$$
2. Montrer que :
$$A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset \overline{B} \Longleftrightarrow B \subset \overline{A}.$$
3. Montrer que :
$$A \cup B = E \Longleftrightarrow \overline{A} \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset A.$$

Exercice 10 : (⋆)
Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
2. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}.$$
3. Montrer que :
$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ (A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C).$$

II Applications

Exercice 11 : (⋆)
Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E.

1. On suppose que :
$$A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C.$$
Que peut-on dire de B et C ? (On raisonnera en utilisant les fonctions indicatrices.)
2. Même question lorsque :
$$A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C.$$

Exercice 12 : (⋆)
Soient E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
3. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{\left(f^{-1}(A)\right)}$,
4. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Exercice 13 : (⋆)
On pose $A = [-1,2]$, $B = [-2,1]$ et :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$
Montrer que :
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B),\ f(\overline{A}) \not\subset \overline{\left(f(A)\right)} \text{ et } \overline{\left(f(A)\right)} \not\subset f(\overline{A}).$$

Exercice 14 : (⋆)
Soient E et F des ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et soit Y un sous-ensemble de F. Montrer que :
$$f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(E).$$

Exercice 15 : (⋆)
Soient E et F des ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer que :
$$\left(\forall Y \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(Y)) = Y\right) \Leftrightarrow \left(\forall Y \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(Y) = \emptyset \Rightarrow Y = \emptyset\right).$$

Exercice 16 : (⋆⋆)
Soient E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
3. Trouver un exemple tel que : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$,
4. Trouver un exemple tel que : $f(\overline{A}) \neq \overline{\left(f(A)\right)}$.

Exercice 17 : (⋆)
On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f([-1,4])$, $f^{-1}([-1,4])$, $f(f^{-1}([-1,4]))$ et $f^{-1}(f([-1,4]))$.

III Injection, surjection, bijection

Exercice 18 : (⋆)
Soit :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy). \end{array}$$
f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 19 : (⋆)
Soit :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z,x). \end{array}$$
Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 20 : (⋆)
Existe-t-il une application surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = (f(x))^2 ?$$

Exercice 21 : (⋆⋆)
Soient :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \text{ et } g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 22 : (⋆⋆)
On considère l'application :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy - y^3). \end{array}$$
f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 23 : (⋆⋆)
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 24 : (⋆)
Soient E, F, G des ensembles, soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

- Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

Exercice 25 : (⋆⋆) Soit E un ensemble, soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Exercice 26 : (⋆ ⋆ ⋆)
Soit E un ensemble et soient A et B des parties non vides de E. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}.$$

1. Monter que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Monter que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Expliciter f^{-1} dans le cas où f est bijective.