Exemples du chapitre 20 :
Matrices et applications linéaires

➪ **Exemple 1 :**

1. Soit $E = \mathbb{K}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,0,1)$ vecteurs de E et $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (2,-1)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soient $x_1 = (3,0)$, $x_2 = (1,1)$, $x_3 = (7,1)$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
3. Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Soit $\mathcal{F} = (X+1, 3X-2, X^2+X)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

➪ **Exemple 2 :** On admet que toutes les applications de cet exemple sont linéaires et on considèrera que $\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace de départ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de l'espace d'arrivée. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ pour :

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z). \end{array}$
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-y+4z. \end{array}$
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P-XP'. \end{array}$
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array}$
5. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z. \end{array}$ avec $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (rotation de centre l'origine et d'angle θ).

➪ **Exemple 3 :**
Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaître l'application linéaire f telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

➪ **Exemple 4 :** Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

➪ **Exemple 5 :** Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P'$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. La matrice A de f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Que peut-on en déduire pour f ?

➪ **Exemple 6 :** Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A.

➪ **Exemple 7 :** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
2. Soit u_1 l'application linéaire canoniquement associée à A. En déduire $\mathrm{Ker}(u_1)$ et $\mathrm{Im}(u_1)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, soit $u_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A$. En déduire $\mathrm{Ker}(u_2)$ et $\mathrm{Im}(u_2)$.

➪ **Exemple 8 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

➪ **Exemple 9 :** Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Posons $x = (2,-1,3,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

➪ **Exemple 10 :** On pose $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,2,3)$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $G = \mathrm{Vect}(v_3)$. On pose $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
En déduire la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

➪ **Exemple 11 :** On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

➪ **Exemple 12 :** Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

➪ **Exemple 13 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
