Exemples du chapitre 19 :
Applications linéaires

➪ **Exemple 1 :** Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
- $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\mapsto(x-3y,x+y-z)$
- $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$, $P\mapsto XP'$
- $f:\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $g\mapsto g(3)$
- $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M\mapsto AM-MA$ où $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, posons $h_\lambda:E\to E$, $x\mapsto\lambda x$ (h_λ est appelée homothétie de rapport λ).

➪ **Exemple 2 :** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que :
$$\forall x\in E,\exists\lambda_x\in\mathbb{K},f(x)=\lambda_x x.$$
Montrer que f est une homothétie.

➪ **Exemple 3 :** Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Sont-elles injectives ? surjectives ?
- $f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,(x,y,z)\mapsto(x+y,x-z)$
- $f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(x+2y,x-y)$
- $f_3:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X],P\mapsto XP'$

➪ **Exemple 4 :** Calculer le rang de l'application linéaire : $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto(x+z,x+y+2z,y+z)$

➪ **Exemple 5 :**
1. On pose : $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.
   Déterminer la projection sur $F=\text{Vect}(e_1,e_2)$ parallèlement à $G=\text{Vect}(e_3)$.
2. On pose $F=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(0)=P(1)=0\}$ et $G=\text{Vect}(X,X-1)$. Déterminer la projection sur F parallèlement à G.

➪ **Exemple 6 :** Soit p un projecteur. On pose : $f=p+Id_E$.
1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer f^n.

➪ **Exemple 7 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :
$$\begin{cases} p\circ q=p\\ q\circ p=q\end{cases}\Leftrightarrow \text{Ker}\,p=\text{Ker}\,q,$$
$$\begin{cases} p\circ q=q\\ q\circ p=p\end{cases}\Leftrightarrow \text{Im}\,p=\text{Im}\,q.$$

➪ **Exemple 8 :** Soit $s:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t)\mapsto(x,y,z,2z-t)$. Montrer que s est une symétrie et déterminer F et G tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

➪ **Exemple 9 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p projecteur tel que $f = g \circ p$.

➪ **Exemple 10 :** Sans utiliser le cours sur les suites, déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

➪ **Exemple 11 :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f.

➪ **Exemple 12 :** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \ker f^p \text{ et } I_p = \operatorname{Im} f^p,$$

où $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p.$$
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :
$$I_r = I_{r+1}$$
4. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p},\ I_r = I_{r+p}.$$
5. Montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$

➪ **Exemple 13 :** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Déterminer la dimension de F.
