

Chapitre 21 : Dénombrément

I Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition

Définition 1

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont equipotents ssi il existe une bijection de E dans F .

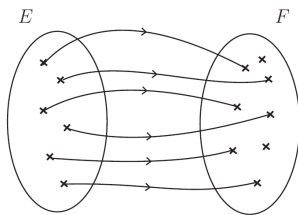
Définition 2

Un ensemble E non vide est dit fini, s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[[1, n]]$ dans E .
Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

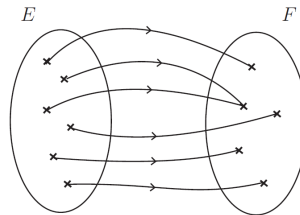
Théorème 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

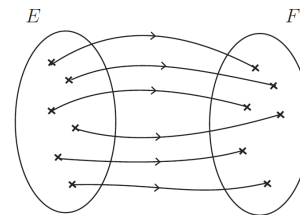
- Il existe une injection de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$ ssi $p \leq n$.
- Il existe une surjection de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$ ssi $p \geq n$.
- Il existe une bijection de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$ ssi $p = n$.



(a) Application injective



(b) Application surjective



(c) Application bijective

Définition 3

Soit E un ensemble fini. L'unique entier naturel n tel que E et $[[1, n]]$ soient equipotents est appelé cardinal de E . On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.

Remarque : Par convention, on considère que \emptyset est fini et que $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Corollaire 1

Soient E et F deux ensembles finis.

- Il existe une injection de E dans F ssi $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
- Il existe une surjection de E dans F ssi $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
- Il existe une bijection de E dans F ssi $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

1.2 Cardinal d'une partie d'un ensemble fini

Lemme 1

Si E est fini non vide et $a \in E$, alors $E \setminus \{a\}$ est fini et $\text{Card}(E \setminus \{a\}) = \text{Card}(E) - 1$.

Preuve. Comme E est fini et non vide, on pose $n = \text{Card}(E) \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe $f: [1, n] \rightarrow E$ bijection.

De plus, il existe un unique $k \in [1, n]$ tel que $f(k) = a$.

Posons :

$$g: [1, n-1] \rightarrow E \setminus \{a\} \\ j \mapsto \begin{cases} f(j) & \text{si } j < k \\ f(j+1) & \text{si } j \geq k \end{cases}$$

- Montrons que g est bien définie.

Soit $j \in [1, n-1]$. On a :

- Si $j < k$ alors $j \neq k$ et comme f est injective $f(j) \neq f(k)$ donc $g(j) = f(j) \neq a$.
- Si $j \geq k$ alors $j+1 \neq k$ et comme f est injective $f(j+1) \neq f(k)$ donc $g(j) = f(j+1) \neq a$.

Dans tous les cas $g(j) \in E \setminus \{a\}$. Ainsi g est bien définie.

- Montrons que g est injective.

Soit $i, j \in [1, n-1]$. Supposons que $g(i) = g(j)$.

Alors :

- Si $i < k$ et $j < k$ alors $g(i) = f(i)$ et $g(j) = f(j)$ donc $f(i) = f(j)$. Or f est injective. Donc $i = j$.
- Si $i \geq k$ et $j \geq k$ alors $g(i) = f(i+1)$ et $g(j) = f(j+1)$ donc $f(i+1) = f(j+1)$. Or f est injective. Donc $i+1 = j+1$ ainsi $i = j$.
- Si $i < k$ et $j \geq k$ alors $g(i) = f(i)$ et $g(j) = f(j+1)$ donc $f(i) = f(j+1)$. Or f est injective. Donc $i = j+1$, or $i < k$ donc $j+1 < k$, ainsi $j < k-1$ ce qui contredit $j \geq k$. Ce cas est donc impossible.
- De même le cas $i \geq k$ et $j < k$ est impossible.

Donc, dans tous les cas (possibles), on a $i = j$.

Ainsi g est injective.

- Montrons que g est surjective.

Soit $x \in E \setminus \{a\}$. Comme f est surjective, il existe $i \in [1, n]$ tel que $f(i) = x$.

Comme $x \neq a$ et f injective, on a $i \neq k$.

- Si $i < k$ alors $g(i) = f(i) = x$ et $i \in [1, n-1]$.
- Si $i > k$ alors $i-1 \geq k$ et $i-1 \in [1, n-1]$, de plus $g(i-1) = f(i) = x$.

Dans tous les cas, il existe $j \in [1, n-1]$ tel que $g(j) = x$. Donc g est surjective.

Ainsi, g est bijective donc $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n-1$.

□

Théorème 2 : Partie d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et F est un sous-ensemble de E , alors :

F est fini et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.

Preuve. On raisonne par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$\mathcal{P}(n)$: « Si E est un ensemble fini de cardinal n , tout sous-ensemble F de E est fini de cardinal inférieur ou égal à n »

- Pour $n = 0$, soit E un ensemble de cardinal 0.

Alors $E = \emptyset$ et le seul sous-ensemble de E est $F = \emptyset$. Il est fini de cardinal 0, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soient E un ensemble de cardinal $n+1$ et F un sous-ensemble de E .

Si $F = E$, alors F est fini de cardinal $n+1$ donc $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.

Supposons $F \neq E$. On a alors $a \in E \setminus F$. D'après le lemme 1, $E_1 = E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal n , et $F \subset E_1$ (puisque $a \notin F$). Par hypothèse de récurrence, on a donc F fini de cardinal $\leq \text{Card}(E_1) = n < n+1$. Ainsi, on a $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.

On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

□

Proposition 1

Soit E un ensemble fini et A, B des sous-ensembles de E tels que $A \subset B$, alors :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) \iff A = B.$$

Preuve.

□

1.3 Applications entre ensembles finis

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute injection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est bijective.
- Toute surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est bijective.

Preuve. Soit $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Supposons f injective.

Supposons f non surjective. Alors il existe $y \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\forall x \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x) \neq y.$$

$$\text{On pose alors } \begin{array}{ccc} g : \llbracket 1, n \rrbracket & \rightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{y\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

g est injective car f l'est.

Donc :

$$\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) \leq \text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{y\}).$$

Donc $n \leq n - 1$ ce qui est absurde. Ainsi f est injective et surjective, donc f est bijective.

- Supposons f surjective.

Supposons f non injective. Alors il existe $x_1, x_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).$$

$$\text{On pose alors } \begin{array}{ccc} g : \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x_1\} & \rightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Montrons que g est surjective.

Soit $y \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme f est surjective, il existe $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y = f(x)$.

- Si $x \neq x_1$, alors $y = g(x)$.
- Si $x = x_1$, alors $y = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2)$.

Donc g est surjective.

Donc :

$$\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x_1\}) \geq \text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket).$$

Donc $n - 1 \geq n$ ce qui est absurde. Ainsi f est injective et surjective, donc f est bijective. □

Corollaire 2

Soient E et F des ensembles finis non vides tels que $\text{Card } E = \text{Card } F$. Soit $f : E \rightarrow F$. On a :

$$f \text{ injective ssi } f \text{ surjective ssi } f \text{ bijective.}$$

1.4 Opérations sur les cardinaux

Proposition 2

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est à dire que $A \cap B = \emptyset$), alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Remarque : En combinatoire, lorsqu'on fait des cas disjoints, cela correspond à une réunion disjointe, il faut donc sommer le nombre de choix possibles. □

Preuve.

Corollaire 3

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i).$$

Remarque : Si E est un ensemble fini, alors, $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$ et il s'agit d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints donc :

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} \text{Card}\{x\} = \sum_{x \in E} 1.$$

On sait donc calculer la somme des 1 indexée car un ensemble fini quelconque.

⇔ **Exemple 1 :** Déterminer le cardinal de l'ensemble :

$$E = \{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, i < j\}.$$

Corollaire 4

Si E est fini et $A \in \mathcal{P}(E)$, alors :

$$\text{Card}(E \setminus A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

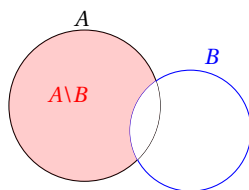
Preuve. □

Corollaire 5

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

Si $B \subset A$, alors $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$.



Preuve. □

Proposition 3

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Preuve. □

Proposition 4

Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F).$$

Remarque : En combinatoire, lorsqu'on fait deux choix successifs, cela revient à regarder des couples, il faut donc multiplier le nombre de choix possibles.

Preuve. □

Corollaire 6

- Soient E_1, \dots, E_p des ensembles finis. Alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et $\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \prod_{i=1}^p \text{Card}(E_i)$.
- En particulier, si E est un ensemble fini, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, E^p est fini de cardinal $(\text{Card}(E))^p$.

Remarque : Lorsque l'on choisit successivement p éléments dans un ensemble à n éléments, avec répétitions possibles (**tirages successifs et avec remise**) donc lorsque l'ordre est pris en compte et que les répétitions sont possibles, on cherche le nombre de p -uplets dont les composantes sont dans un ensemble à n éléments, il y a donc n^p possibilités.

1.5 Cardinal d'ensembles d'applications

Proposition 5

Soient E et F sont deux ensembles finis. Alors l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

Preuve. □

1.6 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Proposition 6

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Preuve. □

II Listes et combinaisons

2.1 Listes

Proposition 7 : Nombre de p -listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p -listes ou p -uplets d'éléments deux à deux distincts de E est égal à :

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Remarque : Lorsque l'on choisit successivement p éléments dans un ensemble à n éléments, sans répétition possible (**tirages successifs et sans remise**) donc lorsque l'ordre est pris en compte et que les répétitions ne sont pas possibles, on cherche le nombre de p -uplets dont les composantes sont dans un ensemble à n éléments et sont deux à deux distinctes, il y a donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ possibilité, si $p \leq n$.

Preuve. □

⇔ **Exemple 2 :** On considère un jeu de 52 cartes. On tire successivement 12 cartes sans remise que l'on place devant soi dans l'ordre de tirage.

1. Quel est le nombre de tirages possibles?
2. Quel est le nombre de tirages commençant par un as?
3. Quel est le nombre de tirages contenant 4 as successifs?

Proposition 8 : Nombre d'injections

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ dans un ensemble F de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Preuve. □

Corollaire 7

Si E est un ensemble fini de cardinal n . L'ensemble des bijections de E sur E (appelées également permutations de E) est fini et a pour cardinal : $n!$.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 3 :** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS?

⇔ **Exemple 4 :** 25 personnes font la queue dans une file d'attente.

1. Combien y a-t-il de files possibles?
2. On considère qu'une certaine personne est toujours en premier. Combien y a-t-il de files possibles?
3. On considère qu'il y a 15 femmes et 10 hommes et que les femmes passent en premier. Combien y a-t-il de files possibles?

2.2 Combinaisons

Proposition 9

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le nombre de partie à p éléments de E est $\binom{n}{p}$.

Remarque : Lorsque l'on choisit simultanément p éléments dans un ensemble à n éléments (**tirages simultanés**) donc lorsque l'ordre n'est pas pris en compte et que les répétitions ne sont pas possibles, on cherche le nombre d'ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments, il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 5 :** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB?

⇔ **Exemple 6 :** On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

1. Combien y a-t-il de comités possibles?
2. Combien y a-t-il de comités composés de 4 hommes et de 4 femmes?
3. Combien y a-t-il de comités composés d'au moins 2 femmes?

⇔ **Exemple 7 :** On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. Combien y a-t-il de possibilités si :

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques?

⇔ **Exemple 8 :** Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

2.3 Démonstration combinatoire de la formule de Pascal

Proposition 10 : Formule de Pascal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Preuve. Donnons ici une preuve combinatoire :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Considérons un ensemble E de cardinal n . Il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments.

Soit $a \in E$, pour avoir une partie de E à p éléments, on distingue :

- Celles qui contiennent a . Il y en a $\binom{n-1}{p-1}$: choix de $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$.
- Celles qui ne contiennent pas a . Il y en a $\binom{n-1}{p}$: choix de p éléments parmi les $n-1$ de $E \setminus \{a\}$.

Comme ces ensembles sont disjoints, on a : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ et on retrouve la formule de Pascal.

□

Remarque : On peut utiliser des arguments combinatoires pour avoir l'idée de la formule du binôme de Newton :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par écrire l'égalité :

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)}_{n \text{ fois}}$$

Pour développer ce produit, il faut additionner tous les produits possibles du type :

$$\underbrace{a \times a \times b \times a \times \dots \times b \times a}_{n \text{ termes}}$$

Tous ces produits seront de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On prend un facteur dans chaque parenthèse. Pour k fixé dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, il a $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir $a^k b^{n-k}$. On choisit pour cela k parenthèses où l'on prend le complexe a , et on prendra nécessairement b dans les $n - k$ restantes. On obtient donc la formule annoncée.