

# Chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie.

## I Matrice d'une application linéaire dans des bases

### 1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

#### Définition 1 : Matrice d'un vecteur

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $x \in E$ . Il existe un unique  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

On appelle matrice du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  dont les coefficients sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On note

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

#### Définition 2 : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ , une famille de vecteurs de  $E$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soient  $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$  les coordonnées de  $u_j$  dans  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire :  $u_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$ .

On appelle matrice de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$  et on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

#### ⇔ Exemple 1 :

1. Soit  $E = \mathbb{K}^3$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  sa base canonique. Soit  $x_1 = (1, 2, 3)$ ,  $x_2 = (2, 0, 1)$  vecteurs de  $E$  et  $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ .
2. Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . Soit  $e_1 = (1, 1)$ ,  $e_2 = (2, -1)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . Soient  $x_1 = (3, 0)$ ,  $x_2 = (1, 1)$ ,  $x_3 = (7, 1)$  et  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ .
3. Posons  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et notons  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ . Soit  $\mathcal{F} = (X + 1, 3X - 2, X^2 + X)$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ .

## 1.2 Matrice d'une application linéaire

### Définition 3

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies.

Soit  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ .

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soient  $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$  les coordonnées de  $u(e_j)$  dans  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire :  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} f_i$ .

On appelle matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , et on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (m_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Dans le cas où  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , on appelle matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Remarque :**  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$ .

⇨ **Exemple 2 :** On admet que toutes les applications de cet exemple sont linéaires et on considèrera que  $\mathcal{B}$  est la base canonique de l'espace de départ et  $\mathcal{C}$  est la base canonique de l'espace d'arrivée. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$  pour :

1.  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z)$ .
2.  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto x - y + 4z$ .
3.  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $P \mapsto P - XP'$ .
4.  $u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$ .
5.  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto e^{i\theta} z$ , avec  $\mathbb{C}$  vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (rotation de centre l'origine et d'angle  $\theta$ ).

⇨ **Exemple 3 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel ayant pour base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Reconnaitre l'application linéaire  $f$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Proposition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$$

Preuve.

□

### 1.3 Matrices et applications linéaires

#### Proposition 2

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces de dimensions finies respectivement égales à  $p$  et  $n$ , munis respectivement des bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ .

Alors l'application :  $\Phi: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$   
 $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  est un isomorphisme.

En particulier :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F), (u = v \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v)).$$

Preuve. □

#### Corollaire 1

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$ . Alors,  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(E) \cdot \dim(F)$$

Preuve. □

### 1.4 Matrices et coordonnées

#### Proposition 3

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies respectivement égales à  $p$  et  $n$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ , soit  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , soit  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ .

Soit  $x \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $\mathcal{B}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ .

Soient  $(y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées de  $u(x)$  dans  $\mathcal{C}$ .

Soit  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$ .

Alors :

$$Y = AX.$$

Preuve. □

⇔ **Exemple 4 :** Soit  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^2$ ). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$ .

### 1.5 Opérations sur les matrices de deux applications linéaires

#### Proposition 4 : Matrice d'une combinaison linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v).$$

### Proposition 5 : Matrice d'une composée

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ . Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u).$$

Preuve. □

### Corollaire 2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n,$$

où  $u^n = u \circ \dots \circ u$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

### Proposition 6

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension  $n$  munis respectivement des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$u$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  est inversible.

On a alors  $(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$ .

Preuve. □

### Corollaire 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$u \in GL(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

On a alors  $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$ .

⇔ **Exemple 5 :** Soit  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(X+1) - P'$ .

1. Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.
2. La matrice  $A$  de  $f$  est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
3. Que peut-on en déduire pour  $f$ ?

## II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

### 2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

#### Définition 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^p$ , soit  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

L'unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$$

est appelée application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

⇔ **Exemple 6 :** Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Remarque :** Si on identifie  $\mathbb{K}^n$  avec  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^p$  avec  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  (convention usuelle), l'application canoniquement associée à  $A$  est :

$$u: \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{array}$$

## 2.2 Noyau et image d'une matrice

### Définition 5

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- On appelle noyau de  $A$  et on note  $\text{Ker } A$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  défini par :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$$

- On appelle image de  $A$  et on note  $\text{Im } A$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  défini par :

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \\ &= \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \end{aligned}$$

**Remarque :** En notant  $u$  l'application canoniquement associée à  $A$ . On a :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \text{Ker } u \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Ker } A,$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in \text{Im } u \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \text{Im } A.$$

⇔ **Exemple 7 :** Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$ .
- Soit  $u_1$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . En déduire  $\text{Ker}(u_1)$  et  $\text{Im}(u_1)$ .
- Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ , soit  $u_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A$ . En déduire  $\text{Ker}(u_2)$  et  $\text{Im}(u_2)$ .

### Proposition 7

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- $\text{Ker } A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .
- $\text{Im } A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

### Proposition 8

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

En notant  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $A$ , on a :

$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

*Preuve.*

□

**Remarque :**

- Les colonnes de  $A$  engendrent l'image.

- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , soit  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j}x_j = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les lignes de  $A$  donnent un système d'équations du noyau.

## 2.3 Rang d'une matrice

### Définition 6

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle rang de  $A$  le rang de la famille  $(C_1, \dots, C_p)$  des colonnes de  $A$ . On note :

$$\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \dim(\text{Im } A).$$

### Proposition 9

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels de dimensions finies.

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  des bases respectives de  $E$  et  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ . On a :

$$\text{rg } A = \text{rg}(u).$$

**Remarque :** On a relié le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice.

*Preuve.* □

### Corollaire 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , le rang d'une matrice  $A$  est égal au rang de l'application  $u$  canoniquement associée à  $A$ .

### Proposition 10

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

$$\text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

*Preuve.* □

### Proposition 11 : Théorème du rang

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

$$p = \dim(\text{Ker } A) + \text{rg}(A).$$

*Preuve.* □

## 2.4 Matrices inversibles

### Proposition 12

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a les équivalences suivantes :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \iff \text{rg}(A) = n.$$

Preuve.

□

**Remarque :** Soit  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ,  $\text{rg}(T) = n$  ssi tous les coefficients diagonaux de  $T$  sont non nuls. On retrouve ainsi la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

**Proposition 13**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $BA = I_n$  alors  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $A^{-1} = B$ .
- S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = I_n$  alors  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $A^{-1} = B$ .

Preuve.

□

## 2.5 Opérations élémentaires

**Proposition 14**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- Les opérations élémentaires sur les colonnes de  $A$  préservent  $\text{Im } A$
- Les opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  préservent  $\text{Ker } A$

Preuve.

□

**Proposition 15**

Les opérations élémentaires préservent le rang.

Preuve.

□

⇒ **Exemple 8 :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer le rang de  $A$ .

**Proposition 16 : Rang de la transposée**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , alors  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$ .

**Remarque :** Ce résultat est admis.

**Corollaire 5**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , notons  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n).$$

## III Changements de bases

### 3.1 Matrice de passage

**Définition 7**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et on note  $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  la matrice :

$$\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Proposition 17**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  des bases de  $E$ .

- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$ .
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ .
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$ .
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $(Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ .

Preuve. □

**3.2 Formules de changement de base****Proposition 18 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$  deux bases de  $E$ .

Soit  $x \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $\mathcal{B}$  et de coordonnées  $(x'_1, \dots, x'_p)$  dans  $\mathcal{B}'$ .

Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .

Alors :

$$X = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X' \text{ et } X' = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})X.$$

Preuve. □

⇨ **Exemple 9 :** Notons  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Posons  $x = (2, -1, 3, 4)$ . Déterminer les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Proposition 19 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On a :

$$Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = Pass(\mathcal{C}', \mathcal{C})Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Preuve. □

**Corollaire 6 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On a :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(u) = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})Mat_{\mathcal{B}}(u)Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(u)Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

⇨ **Exemple 10 :** On pose  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 2, 3)$ ,  $F = Vect(v_1, v_2)$ ,  $G = Vect(v_3)$ . On pose  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ .  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Déterminer  $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ .

En déduire la matrice de  $s$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

⇨ **Exemple 11 :** On note  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$ .

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\begin{aligned} u: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{aligned}$$

1. Vérifier que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer  $Mat_{\mathcal{C}}(u)$ . On note  $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$ .
3. Déterminer  $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ . On note  $B = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ .
4. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .



**Définition 9**

Soit  $(S_0)$  un système homogène, notons  $A$  la matrice associée. On appelle rang de  $(S_0)$  et on note  $\text{rg}(S_0)$  le rang de sa matrice :

$$\text{rg}(S_0) = \text{rg}(A).$$

**Proposition 22**

Soit  $(S_0)$  un système homogène.  
Notons  $E_0$  l'espace des solutions de  $(S_0)$ .  
On a :

$$\dim E_0 = p - \text{rg}(S_0)$$

*Preuve.*

□

**Proposition 23**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .  
Le système  $AX = B$  est compatible ssi  $B \in \text{Im } A$ .

*Preuve.*

□

**Proposition 24**

Soient  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Le système  $AX = B$  possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

*Preuve.*

□