# Chapitre 19 : Applications linéaires

Dans tout ce chapitre $E$,$F$ et $G$ désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Généralités

### 1.1 Définition

**Définition 1**

On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si :

$$\forall\ x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.
On dit que $f$ est un endomorphisme de $E$ ssi $f$ est une application linéaire de $E$ dans $E$. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.

**Proposition 1**

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$

*Preuve.* □

**Proposition 2**

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

➪ **Exemple 1 :** Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y - z)$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto XP'$
- $f : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto g(3)$
- $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, posons $h_\lambda : E \to E$, $x \mapsto \lambda x$ ($h_\lambda$ est appelée homothétie de rapport $\lambda$).

➪ **Exemple 2 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que $f$ est une homothétie.

### 1.2 Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires

**Proposition 3**

$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

**Remarque :** Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

*Preuve.* □

**Proposition 4**

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

**Remarque :** Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

*Preuve.* □

**Proposition 5**

- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F,G)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2.$$
- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f.$$

**Remarque :** On dit que la composition est bilinéaire.

*Preuve.* □

## 1.3 Isomorphismes

**Définition 2**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que $u$ est un isomorphisme si $u$ est bijectif.

**Proposition 6**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes.

1. $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ est un isomorphisme .
2. $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.

*Preuve.* □

## 1.4 Noyau et image

**Proposition 7**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $E'$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $u(E') = \{y \in F\ ,\ \exists x \in E', y = u(x)\} = \{u(x), x \in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
- Si $F'$ est un sous-espace vectoriel de $F$, $u^{-1}(F') = \{x \in E\ ,\ u(x) \in F'\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

*Preuve.* □

**Définition 3**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle

- image de $u$ et on note $\operatorname{Im} u$ l'ensemble $\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$.
Soit $y \in F$,
$$y \in \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = u(x).$$
- noyau de $u$ et on note $\operatorname{Ker}(u)$ l'ensemble $\operatorname{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E\ ,\ \ u(x) = 0\}$.
Soit $x \in E$,
$$x \in \operatorname{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F$$

**Proposition 8**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $\operatorname{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
- $\operatorname{Ker}(u)$ est sous espace-vectoriel de $E$.

*Preuve.* □

**Proposition 9**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$u$ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

*Preuve.* □

**Proposition 10**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$u$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(u) = F$.

*Preuve.* □

**Proposition 11**

Soient $e_1,\dots,e_n \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre et $u$ est injective, alors $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est libre.
- Si $(e_1,...,e_n)$ est liée alors $(u(e_1),...,u(e_n))$ est liée.
- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de $E$ alors $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

**Remarque :** L'image d'une famille génératrice de l'espace de départ par une application linéaire et une famille génératrice de l'image.

*Preuve.* □

➪ **Exemple 3 :** Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Sont-elles injectives ? surjectives ?

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x+y, x-z)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+2y, x-y)$
- $f_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto XP'$

## 1.5 Rang d'une application linéaire

**Définition 4**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On dit que $u$ est de rang fini, lorsque $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
On appelle alors rang de $u$ et on note $\operatorname{rg}(u)$ la dimension de $\operatorname{Im} u$ :

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

➪ **Exemple 4 :** Calculer le rang de l'application linéaire : $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x+z, x+y+2z, y+z)$

**Proposition 12**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini.

- Si $v$ est un isomorphisme de $F$ dans $G$, alors : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.
- Si $v$ est un isomorphisme de $G$ dans $E$, alors : $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

*Preuve.* □

**Proposition 13**

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ de rangs finis.
Alors $v \circ u$ et de rang fini et on a : $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \min(\operatorname{rg}(v), \operatorname{rg}(u))$.

*Preuve.* □

### 1.6 Utilisation d'espaces supplémentaires

**Théorème 1**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires. Pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u$ linéaire de $E$ dans $F$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$. Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux espaces supplémentaires.

*Preuve.* □

## II Endomorphismes

### 2.1 Identité et homothétie

**Proposition 14**

- $Id_E \in \mathcal{L}(E)$,
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$ est appelée homothétie de rapport $\lambda$.

  Alors : $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$.

### 2.2 Opérations sur les endomorphismes

**Proposition 15**

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E)$,
- $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

**Définition 5**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k.$$

**Remarque :** La puissance d'un endomorphisme est une composée et pas un produit.

**Proposition 16 : Formule du binôme de Newton**

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k},$$

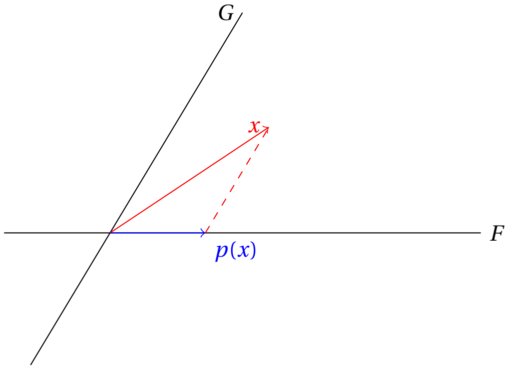
où $(f+g)^n = (f+g) \circ \cdots \circ (f+g)$.

### 2.3 Projecteurs et symétries

**Définition 6**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaires dans $E$. On appelle projecteur ou projection sur $F$ parallèlement à $G$, l'unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ p(x) = 0$$




**Remarque :** Soit $x \in E$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi :

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1.$$

**Proposition 17**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ p = p$$

Dans ce cas, on a $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$ et $p$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.

**Remarque :** On a : $x \in Im(p) \Leftrightarrow p(x) = x$, il est donc inutile d'introduire un "il existe" lors de l'étude de l'image d'un projecteur.

*Preuve.* □

**Proposition 18**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$.
Si $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ et $q$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$ alors :

- $p + q = Id_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

*Preuve.* □

➪ **Exemple 5 :**

1. On pose : $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
   Déterminer la projection sur $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\,(e_3)$.
2. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,(X, X-1)$. Déterminer la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $p$ un projecteur. On pose : $f = p + Id_E$.

1. Montrer que $f$ est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n$.

➪ **Exemple 7 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $p$ et $q$ des projecteurs de $E$. Montrer que :

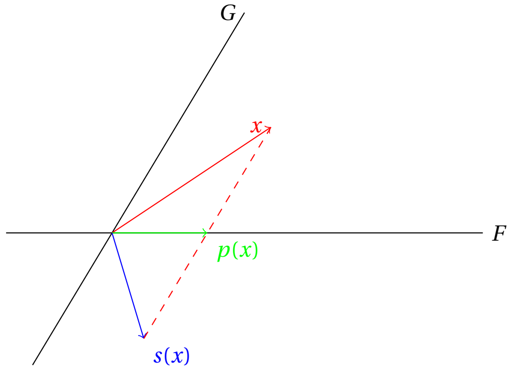
$$\left\{\begin{array}{l} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q,$$

$$\left\{\begin{array}{l} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q.$$

**Définition 7**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaires dans $E$.
On appelle symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$, l'unique endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ s(x) = -x$$




**Remarque :** Soit $x \in E$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi :

$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2.$$

**Proposition 19**

Supposons $E = F \oplus G$. Notons $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. On a :

$$s = 2p - Id_E$$

*Preuve.* □

**Proposition 20**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$s$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = id_E$.

Dans ce cas, $E = \operatorname{Ker}(s - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + Id_E)$ et $s$ est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

*Preuve.* □

➪ **Exemple 8 :** Soit $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, 2z - t)$. Montrer que $s$ est une symétrie et déterminer $F$ et $G$ tels que $s$ soit la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

## 2.4 Automorphismes

**Définition 8**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est un automorphisme de $E$ ssi $u$ est bijectif.
L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé groupe linéaire de $E$ et noté $GL(E)$.

**Proposition 21**

- $Id_E \in GL(E)$,
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $h_\lambda \in GL(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.
- Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$.

**Remarque :** La seule projection qui soit un automorphisme est $Id_E$.

*Preuve.* □

**Proposition 22**

Soient $f, g \in GL(E)$.

- $g \circ f \in GL(E)$ ;
- $f^{-1} \in GL(E)$.

**Remarque :** En général, la combinaison linéaire d'automorphismes n'est pas un automorphisme.

**Définition 9**

Soit $u \in GL(E)$. On définit $u^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k.$$

$$\forall k < 0,\ u^k = (u^{-1})^{-k} = (u^{-k})^{-1}.$$

# III Applications linéaires en dimension finie

## 3.1 Définition sur une base

**Théorème 2**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim(E) = n$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de $F$, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. De plus :

- $u$ est injective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
- $u$ est surjective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est génératrice de $F$.
- $u$ est bijective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $F$

*Preuve.* □

**Corollaire 1**

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
$u$ est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de $F$.

*Preuve.* □

➪ **Exemple 9 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et $p$ projecteur tel que $f = g \circ p$.

## 3.2 Espaces isomorphes

**Définition 10**

On dit que deux espaces sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

**Proposition 23**

Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie.
$E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

*Preuve.* □

**Corollaire 2**

Si $E$ est de dimension $n$, $E$ est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

➪ **Exemple 10 :** Sans utiliser le cours sur les suites, déterminer toutes les suites $(u_n)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

### 3.3 Caractérisation des isomorphismes

**Théorème 3**

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de **même dimension finie** $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$u$ est bijective si et seulement si $u$ est injective, si et seulement si $u$ est surjective.

**Remarque :** Quand on a égalité des dimensions, il est inutile de prouver l'injectivité **et** la surjectivité pour avoir la bijectivité, l'un des deux suffit. En pratique, on prouve souvent l'injectivité en utilisant le noyau.

*Preuve.* □

**Corollaire 3**

Supposons $E$ de dimension finie. Alors :

$f \in GL(E)$ ssi $f$ injectif ssi $f$ surjectif.

**Remarque :** Il ne faut pas oublier l'hypothèse $E$ de dimension finie.

**Proposition 24**

Supposons $E$ de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.
- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.

*Preuve.* □

### 3.4 Espace $\mathcal{L}(E, F)$

**Proposition 25**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ et de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E).\dim(F).$$

**Remarque :** Ce résultat sera prouvé dans le chapitre sur les matrices.

# IV Théorème du rang

**Proposition 26**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $S$ un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $E$. Alors $u$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\operatorname{Im}(u)$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{u}: & S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

*Preuve.* □

**Théorème 4 : Théorème du rang**

Supposons $E$ de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$$

*Preuve.* □

**Corollaire 4**

Supposons $E$ de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$f \text{ injectif ssi } \dim E = \operatorname{rg} f,$$

$$f \text{ surjectif ssi } \dim F = \operatorname{rg} f.$$

*Preuve.* □

➪ **Exemple 11 :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer le rang de $f$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \ker f^p \text{ et } I_p = \operatorname{Im} f^p,$$

où $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p.$$
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :
$$I_r = I_{r+1}$$
4. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p},\ I_r = I_{r+p}.$$
5. Montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$

# V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

## 5.1 Formes linéaires

**Définition 11**

On appelle forme linéaire toute application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

**Proposition 27**

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

*Preuve.* □

## 5.2 Hyperplans

**Définition 12**

On appelle hyperplan tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

**Proposition 28**

Soit $H$ un hyperplan de $E$, soit $u \in E \setminus H$, on a :

$$E = H \oplus \operatorname{Vect}(u).$$

**Remarque :** Un hyperplan admet toujours des supplémentaires (sans hypothèse de dimension) et ses supplémentaires sont des droites vectorielles.

*Preuve.* □

**Proposition 29**

Soit $H$ un hyperplan de $E$, soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulles telles que : $H = \ker\varphi = \ker\psi$. Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \varphi = \lambda\psi.$$

**Remarque :** Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, cette forme linéaire est unique à une constante multiplicative près.

*Preuve.* □

**Proposition 30**

Supposons $E$ de dimension finie. Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$.

$$H \text{ est un hyperplan de } E \text{ ssi } \dim(H) = \dim(E) - 1.$$

*Preuve.* □

**Proposition 31**

Supposons $E$ de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $H$ un hyperplan de $E$. Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tels que :

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}.$$

**Remarque :** Si $E = \mathbb{R}^3$ les hyperplans de $E$ sont les plans de l'espace. Si $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique, cette proposition montre que les plans sont les ensembles de la forme :

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Ainsi, cette proposition donne les équations des hyperplans et généralise les équations des plans de l'espace.

*Preuve.* □

➪ **Exemple 13 :** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Déterminer la dimension de $F$.

# VI Equations linéaires

**Définition 13**

On appelle équation linéaire toute équation du type $u(x) = b$ avec :

- $u : E \to F$ une application linéaire,
- $b \in F$ appelé second membre de l'équation,
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle **équation homogène associée** à $u(x) = b$ l'équation linéaire $u(x) = 0_F$.

**Remarque :**

- Les équations différentielles linéaires sont des équations linéaires. On prend :
  - Pour l'ordre 1, si $a$ et $b$ sont des fonctions continues : $u : y \mapsto y' + ay$.
  - Pour l'ordre 2, si $a, b, c$ sont des constantes : $u : y \mapsto ay'' + by' + cy$.
- Les systèmes linéaires sont des équations linéaires. On prend :

$$u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j\right)$$

**Proposition 32**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, Soit $b \in F$. S'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$ alors, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $u(x) = b$ est :

$$\mathcal{S} = \{x_0 + h,\ h \in \mathrm{Ker}\, u\}.$$

*Preuve.* □

**Remarque :**

- On retrouve le résultat vu sur les systèmes linéaires et les équations linéaires : les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- On peut également retrouver la forme des suites arithmético-géométrique. soient $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$. On pose :

  $$f : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

  L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = b$ est l'ensemble des suites telles que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

  c'est-à-dire des suites arithmético-géométriques.
  L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ est l'ensemble des suites telles que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n,$$

  c'est-à-dire des suites géométriques de raison $a$, donc des suites de la forme $\lambda(a^n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Si $l = al + b$, la suite constante égale à $l$ est dans $\mathcal{S}$.
  Donc, les suites arithmético-géométriques sont de la forme :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = l + \lambda a^n,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$