Chapitre 19 : Applications linéaires

Dans tout ce chapitre E,F et G désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1.1 Définition

Définition 1

On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si :

$$\forall\ x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
On dit que f est un endomorphisme de E ssi f est une application linéaire de E dans E. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 1

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$

Preuve.

□

Proposition 2

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

➪ **Exemple 1 :** Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x-3y, x+y-z)$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto XP'$
- $f : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto g(3)$
- $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, posons $h_\lambda : E \to E$, $x \mapsto \lambda x$ (h_λ est appelée homothétie de rapport λ).

➪ **Exemple 2 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que f est une homothétie.

1.2 Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires

Proposition 3

$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Remarque : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Preuve.

□

Proposition 4

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

Remarque : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Preuve.

□

Proposition 5

- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F,G)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2.$$

- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f.$$

Remarque : On dit que la composition est bilinéaire.

Preuve.

□

1.3 Isomorphismes

Définition 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est un isomorphisme si u est bijectif.

Proposition 6

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes.

1. $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est un isomorphisme .
2. f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Preuve.

□

1.4 Noyau et image

Proposition 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u(E') = \{y \in F\ ,\ \exists x \in E', y = u(x)\} = \{u(x), x \in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, $u^{-1}(F') = \{x \in E\ ,\ u(x) \in F'\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

□

Définition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle

- image de u et on note $\operatorname{Im} u$ l'ensemble $\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$.
  Soit $y \in F$,
  $$y \in \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = u(x).$$
- noyau de u et on note $\operatorname{Ker}(u)$ l'ensemble $\operatorname{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E\ , \quad u(x) = 0\}$.
  Soit $x \in E$,
  $$x \in \operatorname{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F$$

Proposition 8

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $\operatorname{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\operatorname{Ker}(u)$ est sous espace-vectoriel de E.

Preuve.

□

Proposition 9

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

Preuve.

□

Proposition 10

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(u) = F$.

Preuve.

□

Proposition 11

Soient $e_1, \dots, e_n \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et u est injective, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre.
- Si $(e_1, ..., e_n)$ est liée alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est liée.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

Remarque : L'image d'une famille génératrice de l'espace de départ par une application linéaire et une famille génératrice de l'image.

Preuve.

□

➪ **Exemple 3 :** Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes. Sont-elles injectives ? surjectives ?

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, x - z)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y)$
- $f_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto XP'$

1.5 Rang d'une application linéaire

Définition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
On dit que u est de rang fini, lorsque $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
On appelle alors rang de u et on note $\operatorname{rg}(u)$ la dimension de $\operatorname{Im} u$:

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

➪ **Exemple 4 :** Calculer le rang de l'application linéaire : $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + z, x + y + 2z, y + z)$

Proposition 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

- Si v est un isomorphisme de F dans G, alors : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.
- Si v est un isomorphisme de G dans E, alors : $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

Preuve.

$\square$

Proposition 13

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ de rangs finis.
Alors $v \circ u$ et de rang fini et on a : $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(v), \text{rg}(u))$.

Preuve.

$\square$

1.6 Utilisation d'espaces supplémentaires

Théorème 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application u linéaire de E dans F telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$. Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux espaces supplémentaires.

Preuve.

□

II Endomorphismes

2.1 Identité et homothétie

Proposition 14

- $Id_E \in \mathcal{L}(E)$,
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$ est appelée homothétie de rapport λ.
  Alors : $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$.

2.2 Opérations sur les endomorphismes

Proposition 15

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E)$,
- $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k.$$

Remarque : La puissance d'un endomorphisme est une composée et pas un produit.

Proposition 16 : Formule du binôme de Newton

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k},$$

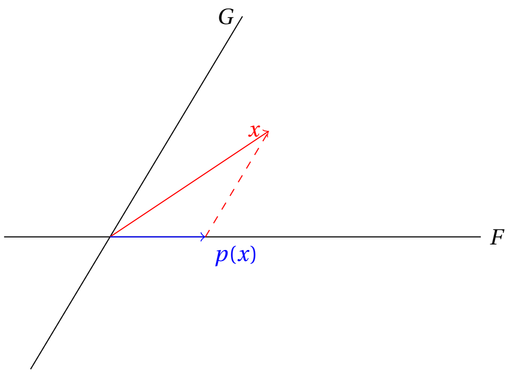
où $(f+g)^n = (f+g) \circ \cdots \circ (f+g)$.

2.3 Projecteurs et symétries

Définition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On appelle projecteur ou projection sur F parallèlement à G, l'unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ p(x) = 0$$



Remarque : Soit $x \in E$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi :

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1.$$

Proposition 17

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ p = p$$

Dans ce cas, on a $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Remarque : On a : $x \in Im(p) \Leftrightarrow p(x) = x$, il est donc inutile d'introduire un "il existe" lors de l'étude de l'image d'un projecteur.

Preuve.

□

Proposition 18

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F alors :

- $p + q = Id_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 5 :**

1. On pose : $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
   Déterminer la projection sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.
2. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X, X-1)$. Déterminer la projection sur F parallèlement à G.

➪ **Exemple 6 :** Soit p un projecteur. On pose : $f = p + Id_E$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer f^n.

➪ **Exemple 7 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

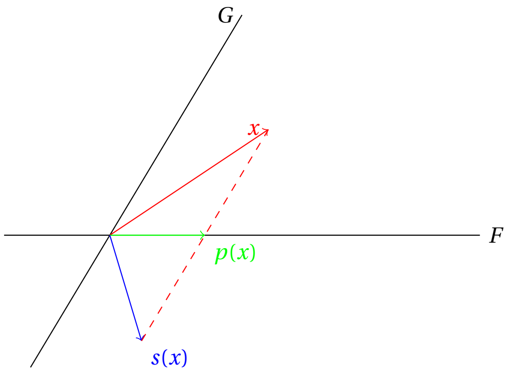
$$\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q,$$

$$\begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q.$$

Définition 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'unique endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ s(x) = -x$$



Remarque : Soit $x \in E$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi :

$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2.$$

Proposition 19

Supposons $E = F \oplus G$. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p la projection sur F parallèlement à G. On a :

$$s = 2p - Id_E$$

Preuve.

□

Proposition 20

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s \circ s = id_E.$$

Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id_E)$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 8 :** Soit $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, 2z - t)$. Montrer que s est une symétrie et déterminer F et G tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

2.4 Automorphismes

Définition 8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un automorphisme de E ssi u est bijectif.
L'ensemble des automorphismes de E est appelé groupe linéaire de E et noté $GL(E)$.

Proposition 21

- $Id_E \in GL(E)$,
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $h_\lambda \in GL(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.
- Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$.

Remarque : La seule projection qui soit un automorphisme est Id_E.

Preuve.

□

Proposition 22

Soient $f, g \in GL(E)$.

- $g \circ f \in GL(E)$;
- $f^{-1} \in GL(E)$.

Remarque : En général, la combinaison linéaire d'automorphismes n'est pas un automorphisme.

Définition 9

Soit $u \in GL(E)$. On définit u^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k.$$

$$\forall k < 0,\ u^k = (u^{-1})^{-k} = (u^{-k})^{-1}.$$

III Applications linéaires en dimension finie

3.1 Définition sur une base

Théorème 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim(E) = n$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. De plus :

- u est injective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
- u est surjective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est génératrice de F.
- u est bijective ssi $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de F

Preuve.

□

Corollaire 1

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
u est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de F.

Preuve.

□

➪ **Exemple 9 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p projecteur tel que $f = g \circ p$.

3.2 Espaces isomorphes

Définition 10

On dit que deux espaces sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Proposition 23

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie.
E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Preuve.

□

Corollaire 2

Si E est de dimension n, E est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

➪ **Exemple 10 :** Sans utiliser le cours sur les suites, déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

3.3 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3

Soit E et F deux espaces vectoriels de **même dimension finie** $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

u est bijective si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.

Remarque : Quand on a égalité des dimensions, il est inutile de prouver l'injectivité **et** la surjectivité pour avoir la bijectivité, l'un des deux suffit. En pratique, on prouve souvent l'injectivité en utilisant le noyau.

Preuve.

□

Corollaire 3

Supposons E de dimension finie. Alors :

$$f \in GL(E) \text{ ssi } f \text{ injectif ssi } f \text{ surjectif.}$$

Remarque : Il ne faut pas oublier l'hypothèse E de dimension finie.

Proposition 24

Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.
- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.

Preuve.

□

3.4 Espace $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 25

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ et de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E).\dim(F).$$

Remarque : Ce résultat sera prouvé dans le chapitre sur les matrices.

IV Théorème du rang

Proposition 26

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{u}: & S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve.

□

Théorème 4 : Théorème du rang

Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$$

Preuve.

□

Corollaire 4

Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$f \text{ injectif ssi } \dim E = \operatorname{rg} f,$$

$$f \text{ surjectif ssi } \dim F = \operatorname{rg} f.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 11 :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f.

➪ **Exemple 12 :** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \ker f^p \text{ et } I_p = \operatorname{Im} f^p,$$

où $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p.$$
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :
$$I_r = I_{r+1}$$
4. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}, I_r = I_{r+p}.$$
5. Montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$

V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

5.1 Formes linéaires

Définition 11

On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Proposition 27

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

Preuve.

□

5.2 Hyperplans

Définition 12

On appelle hyperplan tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 28

Soit H un hyperplan de E, soit $u \in E \setminus H$, on a :

$$E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Remarque : Un hyperplan admet toujours des supplémentaires (sans hypothèse de dimension) et ses supplémentaires sont des droites vectorielles.

Preuve.

$\square$

Proposition 29

Soit H un hyperplan de E, soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulles telles que : $H = \ker\varphi = \ker\psi$. Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi = \lambda\psi.$$

Remarque : Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, cette forme linéaire est unique à une constante multiplicative près.

Preuve.

□

Proposition 30

Supposons E de dimension finie. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

$$H \text{ est un hyperplan de } E \text{ ssi } \dim(H) = \dim(E) - 1.$$

Preuve.

□

Proposition 31

Supposons E de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit H un hyperplan de E. Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tels que :

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}.$$

Remarque : Si $E = \mathbb{R}^3$ les hyperplans de E sont les plans de l'espace. Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique, cette proposition montre que les plans sont les ensembles de la forme :

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Ainsi, cette proposition donne les équations des hyperplans et généralise les équations des plans de l'espace.

Preuve.

□

➪ **Exemple 13 :** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Déterminer la dimension de F.

VI Equations linéaires

Définition 13

On appelle équation linéaire toute équation du type $u(x) = b$ avec :

- $u : E \to F$ une application linéaire,
- $b \in F$ appelé second membre de l'équation,
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle **équation homogène associée** à $u(x) = b$ l'équation linéaire $u(x) = 0_F$.

Remarque :

- Les équations différentielles linéaires sont des équations linéaires. On prend :
  - Pour l'ordre 1, si a et b sont des fonctions continues : $u : y \mapsto y' + ay$.
  - Pour l'ordre 2, si a, b, c sont des constantes : $u : y \mapsto ay'' + by' + cy$.
- Les systèmes linéaires sont des équations linéaires. On prend :

$$u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j\right)$$

Proposition 32

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, Soit $b \in F$. S'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$ alors, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $u(x) = b$ est :

$$\mathcal{S} = \{x_0 + h,\ h \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Preuve.

□

Remarque :

- On retrouve le résultat vu sur les systèmes linéaires et les équations linéaires : les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- On peut également retrouver la forme des suites arithmético-géométrique. soient $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$. On pose :

  $$f : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

  L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = b$ est l'ensemble des suites telles que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

  c'est-à-dire des suites arithmético-géométriques.
  L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ est l'ensemble des suites telles que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n,$$

  c'est-à-dire des suites géométriques de raison a, donc des suites de la forme $\lambda(a^n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Si $l = al + b$, la suite constante égale à l est dans $\mathcal{S}$.
  Donc, les suites arithmético-géométriques sont de la forme :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = l + \lambda a^n,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$