Indications
DM 5

Problème 1 :

1. On doit trouver une fonction constante.
2. Utiliser les propriétés des opérations ensemblistes.
3. (a) Si l'équation $f(X) = \emptyset$ admet au moins une solution écrire des inclusions.
   Si $A \cap B = \emptyset$, utiliser un des résultats de 2. pour exhiber une solution.
   (b) Raisonner par analyse-synthèse et montrer que les solutions sont les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que : $B \subset X \subset \overline{A}$.
4. (a) Ecrire des inclusions.
   (b) Si l'équation $f(X) = E$ admet au moins une solution écrire des inclusions.
   Si $A \cup B = E$, utiliser un des résultats de 2. pour exhiber une solution.
   (c) Raisonner par analyse-synthèse et montrer que les solutions sont les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que : $\overline{B} \subset X \subset A$.

Problème 2 :

1. (a) Raisonner par récurrence.
   Utiliser le théorème de la limite monotone puis un passage à la limite dans la définition de (x_n).
   (b) Reprendre le raisonnement de la question précédente.
2. Faire apparaître une identité remarquable.
3. Faire apparaître une identité remarquable.
4. Faire apparaître une identité remarquable.
5. Utiliser la monotonie de (u_n) pour trouver un majorant de (v_n) et le monotonie de (v_n) pour trouver un minorant de (u_n).
6. Remarquer que, dans tous les cas, $\lim x_n = 1$.
7. Utiliser la monotonie de (u_n) et (v_n) puis le cas particulier $n = 0$.
8. Faire $t = 1$ dans la question précédente.
9. Utiliser le théorème d'encadrement dans les deux cas : $t > 1$ et $t < 1$.
   Reconnaître la limite d'un taux d'accroissement.
10. (a) Raisonner par récurrence.
    (b) Montrer que : $u_n(t_1.t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) = u_n(t_1)(x_n(t_2) - 1)$.
    (c) Passer à la limite dans la relation précédente.
11. (a) Appliquer la question précédente à t_1 et t_2 bien choisis.
    (b) Ecrire la taux d'accroissement en t : $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ en fonction du taux d'accroissement en 1 : $\frac{f(x)}{x-1}$ pour utiliser 9.
    (c) Primitiver et calculer la constante.
12. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = t^{1/2^n}$.
    Calculer $\lim u_n$ en utilisant $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.