
Indications : vacances d'hiver



Problème facultatif : Révisions d'analyse

PARTIE I

Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax + b)$

1. *Étude du cas $|a| < 1$*
 - (a) (x_n) est une suite arithmético-géométrique.
 - (b)
 - (c) Passage à la limite dans la relation $f(x_n) = f(x)$.
 - (d) Analyse-synthèse.
2. *Étude du cas $|a| > 1$*
 - (a) Double implication.
 - (b) Se ramener à $\mathcal{E}(g_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}})$.

PARTIE II

Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

3. *Étude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$*
 - (a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x .
 - (b) Appliquer l'inégalité précédente dans les cas $x > 0$ et $x < 0$.
 - (c) Théorème des valeurs intermédiaires.
4. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$*
 - (a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre x_n et L .
 - (b) Passage à la limite dans la relation $f(x_n) = f(x)$.
 - (c) Analyse-synthèse.
5. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$*
 - (a) Valeurs intermédiaires pour le signe de g' et inégalité des accroissements finis pour les limites.
 - (b) Résultat de dérivabilité d'une bijection réciproque.
 - (c) Raisonner par équivalences puis se ramener à la question 4. appliquée à g^{-1} .

PARTIE III

Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(x^2)$ et $f(x) = f(e^x)$

6. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$*
 - (a) Calculer g' .
 - (b) Récurrence.
 - (c)
 - (d) Analyse-synthèse en montrant d'abord que f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$*
 - (a)
 - (b)
 - (c) Utiliser l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ et une somme télescopique.
 - (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction f définie sur $] -\infty, x_{n+1}]$, continue sur $] -\infty, x_n]$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$ et qui vérifie : $\forall x \in] -\infty, x_n], f(x) = f(e^x)$.
Pour cela on raisonnera par récurrence sur n et on fera une analyse-synthèse à chaque étape de la récurrence.