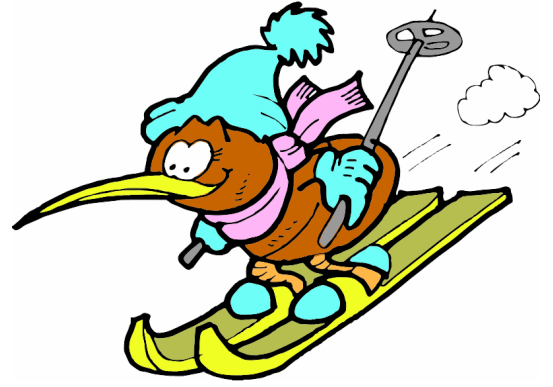

Corrections : vacances d'hiver



Problème facultatif : Révisions d'analyse

1. Étude du cas $|a| < 1$

- (a) • Soit $l \in \mathbb{R}$, on a :

$$l = al + b \Leftrightarrow (1 - a)l = b \Leftrightarrow l = \frac{b}{1 - a}.$$

- Posons $l = \frac{b}{1 - a}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - l = ax_n + b - (al + b) = a(x_n - l).$$

Donc $(x_n - l)$ est géométrique de raison a .

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_n - l = a^n(x_0 - l)$, ainsi :

$$x_n = a^n(x_0 - l) + l = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1 - a} \right) + \frac{b}{1 - a}.$$

- (b) Comme $|a| < 1$, on a : $\lim a^n = 0$ donc :

$$\lim x_n = \frac{b}{1 - a}.$$

- (c) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f(ax_n + b) = f(g_{a,b}(x_n)) = f(x_n)$ car $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = f(x_n).$$

- ii. Ainsi, la suite $(f(x_n))$ est constante. Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x)$.

De plus, comme f est continue, $\lim f(x_n) = f\left(\frac{b}{1 - a}\right)$. Donc, par passage à la limite :

$$f(x) = f\left(\frac{b}{1 - a}\right).$$

- (d) • Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. D'après la question précédente, f est constante.
• Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c = f(ax + b)$.
Donc $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$.
• Conclusion : $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

2. Étude du cas $|a| > 1$

- (a) • Supposons (1) vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après (1) :

$$f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = f\left(a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b\right) = f(x - b + b) = f(x).$$

Donc (2) est vraie.

- Supposons (2) vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après (2) :

$$f(ax + b) = f\left(\frac{ax + b}{a} - \frac{b}{a}\right) = f\left(x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = f(x).$$

Donc (1) est vraie.

- Ainsi (1) et (2) sont équivalentes.

- (b) Comme (1) et (2) sont équivalentes, on a : $\mathcal{E}(g_{a,b}) = \mathcal{E}(g_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}})$.

Or, comme $|a| > 1$, on a $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$. Donc, d'après 1., $\mathcal{E}(g_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Donc $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

3. Étude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, comme g est \mathcal{C}^1 , d'après l'inégalité des accroissements finis : $|g(x) - g(0)| \leq K|x - 0| = K|x|$. Ainsi $-K|x| \leq g(x) - g(0) \leq K|x|$. D'où :

$$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$

- (b) i. Soit $x > 0$, on a : $g(x) \leq g(0) + Kx$ donc $g(x) - x \leq g(0) + (K-1)x$. Or $K-1 < 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(0) + (K-1)x) = -\infty$.
Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = -\infty.$$

- ii. Soit $x < 0$, on a : $g(x) \geq g(0) + Kx$ donc $g(x) - x \geq g(0) + (K-1)x$. Or $K-1 < 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(0) + (K-1)x) = +\infty$.
Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = +\infty.$$

- (c) • Posons $h : x \mapsto g(x) - x$. h est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x) - 1 \leq K - 1 < 0.$$

Donc h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

- Ainsi h est strictement décroissante et continue sur \mathbb{R} . De plus, comme $] \lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h [=] -\infty, +\infty[$, on a : $0 \in] \lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h [$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $L \in \mathbb{R}$ tel que $h(L) = 0$, c'est-à-dire tel que : $g(L) = L$.

4. Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$

- (a) • Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|x_{n+1} - L| = |g(x_n) - g(L)| \leq K|x_n - L|.$$

- Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - L| \leq K^n |x_0 - L|$. Or $|K| < 1$ donc $\lim K^n = 0$ ainsi :

$$\lim x_n = L.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f(g(x_n)) = f(x_n)$ car $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. Donc la suite $(f(x_n))$ est constante.
Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x)$.
De plus, comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(L)$. Donc, par passage à la limite :

$$f(x) = f(L).$$

- (c) • Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g)$. D'après la question précédente, f est constante.
• Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c = f(g(x))$.
Donc $f \in \mathcal{E}(g)$.
• Conclusion : $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

5. Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$

- (a) • Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|g'(x)| \geq K > 1$ donc $g'(x) \neq 0$. Ainsi g' ne s'annule pas sur \mathbb{R} et comme g' est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g' est de signe constant sur \mathbb{R} .
• Si $g' > 0$, alors g est strictement croissante sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq K$.
– Soit $x > 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $g(x) - g(0) \geq Kx$ donc $g(x) \geq Kx + g(0)$.

Or $K > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (Kx + g(0)) = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

- Soit $x < 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $g(0) - g(x) \geq -Kx$ donc $g(x) \leq Kx + g(0)$.
Or $K > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (Kx + g(0)) = -\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

- Si $g' < 0$ alors, en appliquant le point précédent à $-g$, on a g strictement décroissante et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

- (b) • g est continue et strictement monotone sur \mathbb{R} donc g est bijective de \mathbb{R} vers $] \lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g [$ ou $] \lim_{+\infty} g, \lim_{-\infty} g [$.
Donc g est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .
Ainsi g admet une bijection réciproque définie sur \mathbb{R} .
• Comme g est continue, g^{-1} est continue.
• Comme g est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$. Or $|g'(g^{-1}(x))| \leq K$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| (g^{-1})'(x) \right| \leq \frac{1}{K}$$

- (c) • Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{E}(g) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(g(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, f(g^{-1}(y)) = f(y) \quad \text{car } y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{E}(g^{-1}) \end{aligned}$$

- Ainsi $\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(g^{-1})$. Or $\frac{1}{K} < 1$ donc g^{-1} vérifie l'hypothèse \mathcal{H} . Ainsi $\mathcal{E}(g^{-1})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
- Donc $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

6. Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$

- (a) • g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x$.
 • On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g'(x)| = +\infty$ donc $|g'|$ n'est pas majorée, ainsi g ne vérifie pas \mathcal{H} .
 • On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$ donc $|g'|$ n'est pas minorée par une constante strictement supérieure à 1 donc g ne vérifie pas \mathcal{H}' .
- (b) • Pour $n = 0, x_n = x = x^{1/2^0}$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $x_n = x^{1/2^n}$. Alors :

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = (x^{1/2^n})^{1/2} = x^{1/2^{n+1}}.$$

- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x^{1/2^n}$.
 - On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^0 = 1$ car $x > 0$.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = f(x_n^2) = f(x_n)$.
- (d) • Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g)$.
 – Soit $x > 0$ d'après la question précédente, la suite $(f(x_n))$ est constante.
 Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x)$.
 De plus, comme f est continue, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(1)$. Donc, par passage à la limite : $f(x) = f(1)$.
 Donc f est constante sur \mathbb{R}^{+*} .
 – Soit $x < 0$, comme $-x > 0$

$$f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) = f(1).$$

Donc f est constante sur \mathbb{R}^{-*} .

- Comme f est continue sur \mathbb{R} , f est constante sur \mathbb{R} .
- Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c = f(g(x))$.
 Donc $f \in \mathcal{E}(g)$.
- Conclusion : $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

7. Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$

- (a) On a : $f(0) = f(e^0) = f(1)$.
 (b) Soit $x < 0, f(x) = f(e^x)$ et, comme $x < 0, e^x \in [0, 1]$.
 (c) • On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{x_n} \geq x_n + 1$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \geq x_n + 1 > x_n$.
 Donc (x_n) est strictement croissante.
 • Soit $k \in \mathbb{N}$, on a : $x_{k+1} - x_k \geq 1$.

$$\text{Donc, soit } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1.$$

Donc, par somme télescopique : $x_n - x_0 \geq n$, d'où $x_n \geq x_0 + n$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

- \ln est continue et strictement croissante sur $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ donc \ln est bijective de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ vers $]\ln(x_{n+1}), \ln(x_{n+2})] =]x_n, x_{n+1}]$.
 - Soit $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, on a : $f(\ln x) = f(e^{\ln x}) = f(x)$ et, d'après le point précédent, $\ln x \in]x_n, x_{n+1}]$.
- (d) • Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction f définie sur $]-\infty, x_{n+1}]$, continue sur $]-\infty, x_n]$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, x_n], f(x) = f(e^x)$.
 – Pour $n = 0$.
 * Analyse : Supposons qu'il existe f définie sur $]-\infty, 1]$, continue sur $]-\infty, 0]$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, 0], f(x) = f(e^x)$.
 Soit $x \in]-\infty, 0]$, comme $e^x \in [0, 1]$, on a :

$$f(x) = f(e^x) = \varphi(e^x).$$

Et, soit $x \in]0, 1]$, on a : $f(x) = \varphi(x)$.

$$f:]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

* Synthèse : Posons

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(e^x) & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors, comme φ est continue :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \varphi(0) = f(0).$$

Donc f est continue en 0.

Comme f est continue sur $] -\infty, 0[$, f est continue sur $] -\infty, 0]$.

De plus : $\forall x \in] -\infty, 0[$, $f(x) = \varphi(e^x) = f(e^x)$ et f coïncide avec φ sur $[0, 1]$.

* D'où l'existence et l'unicité de f pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n . Notons \tilde{f} la fonction obtenue au rang n .

* Analyse : Supposons qu'il existe f définie sur $] -\infty, x_{n+2}]$, continue sur $] -\infty, x_{n+1}]$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$ et qui vérifie : $\forall x \in] -\infty, x_{n+1}]$, $f(x) = f(e^x)$.

Alors f vérifie ces propriétés sur $] -\infty, x_{n+1}]$ donc, par unicité : $\forall x \in] -\infty, x_{n+1}]$, $f(x) = \tilde{f}(x)$.

Soit $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, alors $f(x) = f(\ln x)$ avec $\ln x \in]x_n, x_{n+1}]$ donc $f(x) = \tilde{f}(\ln x)$.

$$f:]-\infty, x_{n+2}] \rightarrow \mathbb{R}$$

* Synthèse : Posons

$$x \mapsto \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } x \leq x_{n+1} \\ \tilde{f}(\ln x) & \text{si } x > x_{n+1}. \end{cases}$$

Alors f est clairement continue sur $] -\infty, x_{n+1}] \setminus \{x_n\}$. De plus, comme \tilde{f} est continue sur $] -\infty, x_n]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_n^+} f(x) = \tilde{f}(\ln x_n) = \tilde{f}(e^{\ln x_n}) = \tilde{f}(x_n) = f(x_n),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_n^-} f(x) = \tilde{f}(x_n) = f(x_n).$$

Donc f est continue en x_n .

Ainsi f est continue sur $] -\infty, x_{n+1}]$.

De plus, f coïncide avec \tilde{f} donc avec φ sur $[0, 1]$.

Enfin,

· Soit $x \in] -\infty, x_n]$, $f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^x) = f(x)$ car $e^x \leq x_{n+1}$.

· Soit $x \in]x_n, x_{n+1}]$, $f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\ln(e^x)) = f(e^x)$ car $e^x > x_{n+1}$.

Donc f convient.

* D'où l'existence et l'unicité de f au rang $n + 1$.

- On a donc montré le résultat par récurrence sur n .

- Comme $\lim x_n = +\infty$, le résultat est vrai sur \mathbb{R} , donc il existe une unique fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$.
- Ainsi $\mathcal{E}(\exp)$ est l'ensemble des fonctions ainsi construites qui coïncident avec une fonction quelconque φ continue sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$.