

Programme de révisions : vacances d'hiver



Un exercice d'analyse asymptotique avec des révisions si besoin



Un exercice calculatoire de révisions



Révisions d'analyse : refaire les exercices/exemples // en consultant le cours



Travail du cours d'algèbre linéaire



Préparation du DM



Séance 1 :



Composition de DL

Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de :

$$f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Solution : } e \left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 \right) + o((x-1)^2)$$

En cas de problème : Refaire l'exemple 7 du chapitre 16



Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 \sqrt{x} + x}.$$

$$\text{Solution : changement de variable en } \sqrt{x}, x \mapsto \frac{6}{4} \left(1 + \frac{3}{2}x \right)^{3/2}$$



Chapitre 11 : Suites numériques

- exemple 3 (vers la règle de D'Alembert)
- exemple 5 (théorème de Césaro)
- exemple 10.1 ($u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante et u_0 donné)
- exemple 10.3 ($u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante et u_0 non donné)
- exemple 13 ($u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et u_0 donné)



Parties A et B du problème 2

Séance 2 :



Réduction de l'ordre

Calculer le développement limité à l'ordre 12 en 0 de :

$$f : x \mapsto (\text{Arctan}(x) - x) \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \frac{1}{2}x^2 \right)^2$$

Solution : $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{160}x^8 - \frac{1}{1120}x^{10} + \frac{1}{1280}x^{12} + o(x^{12})$

En cas de problème : Refaire l'exemple 6 du chapitre 16



Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{1}{2}y = \sin x.$$

Solution : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos \frac{x}{2} + \mu \sin \frac{x}{2} \right) - \frac{5}{4} \cos x - \frac{5}{2} \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$



Chapitre 13 : Limites et continuité

- exemple 11 (équation fonctionnelle)
- exemple 13 (point fixe)
- exercice 17 (TVI)
- exercice 21 (TVI)
- exercice 27 (théorème des bornes atteintes)



Parties C et D du problème 2

Séance 3 :



Quotient de DL

Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$f : x \mapsto \frac{\text{ch}(x) - 1}{\ln(1-x) + x}.$$

Solution : $1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{1}x^2 + o(x^2)$

En cas de problème : Refaire l'exemple 8 du chapitre 16



Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0.$$

Solution : $z = -1 + i, -1 - i, -3 + 2i, -3 - 2i$



Chapitre 14 : Dérivabilité

- exemple 6 (Rolle)
- exercice 15 (Rolle)
- exemple 8 (accroissements finis)
- exemple 17 (convexité et inégalités)
- exemple 18 (convexité et inégalités)



Partie E du problème 2

Séance 4 :



Primitivation de DL

Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\sqrt{3}$ de :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{x}\right).$$

Solution : $(\sqrt{3} - x) + (\sqrt{3} - x)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}$

En cas de problème : Refaire les exemples 9 et 10 du chapitre 16



Calculer la dérivée n -ième de :

$$f : x \mapsto (x^2 - x + 2)e^x.$$

Solution : $x^n((2 + nu - u^2) + x(1 - u))e^x = (x^n)_{(u)} f$



Chapitre 16 : Analyse asymptotique

- exemple 18 (bijection réciproque)
- exemple 19 (suite récurrente)
- exemple 20 (suite implicite)
- exemple 21 (suite intégrale)
- exemple 22 (suite implicite)

Séance 5 :



Calcul de limites

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1 + \sin x) - x}.$$

Solution : -2

En cas de problème : Refaire l'exemple 11 du chapitre 16



Résoudre sur \mathbb{R}^{++} l'équation différentielle : $x^2 y' - (x + 1)y = (x^3 - x)e^x$.

Solution : $x \mapsto \lambda x^2 + x^{-1} - \partial x \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Chapitre 17 : Espaces vectoriels

- Relire I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
 - Savoir faire une preuve de sous-espace vectoriel \rightarrow exemple 1
 - Savoir écrire un espace sous forme d'espace vectoriel engendré \rightarrow exemple 2.2 et 2.3.
 - Savoir montrer que deux espaces sont supplémentaires \rightarrow exemples 3 et 4
- Préparer l'exercice 9



Problème 1

Séance 6 :



Etude d'une tangente

Etudier la tangente en 0 à la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1+\sin^2(x)} + \frac{x^2}{2}.$$

Solution : équation de la tangente $y = -x$ et au voisinage de 0⁺ (resp. 0⁻) la courbe est au dessus (resp. en dessous) de sa tangente.

En cas de problème : Refaire les exemples 12 et 13 du chapitre 16



Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$. Montrer que $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe ssi $h : x \mapsto xf(x)$ est convexe.

Solution : $\left(\frac{x}{t}\right)'' = \frac{x''}{t} - \frac{x' t'}{t^2} = (x)'' \frac{x}{t^2}$



Chapitre 17 : Espaces vectoriels

- Relire II Familles finies de vecteurs.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
 - Savoir montrer qu'une famille est libre → exemple 5
 - Savoir montrer qu'une famille est génératrice → exemple 6
 - Savoir déterminer une base d'un espace vectoriel → exemple 7
- Préparer les exercices 17, 23 et 25.



Problème facultatif : Révisions d'analyse

L'objet de ce problème est d'obtenir quelques résultats à propos de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(g(x)).$$

La fonction g , qui est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est ici donnée et on cherche l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ des fonctions f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la relation précédente.

Dans la partie I, on traite le cas où $g(x) = ax + b$ avec a, b réels. Dans la partie II, on démontre, sous certaines hypothèses, que $\mathcal{E}(g)$ peut se réduire aux fonctions constantes. Enfin dans la partie III, on traite les cas où $g(x) = x^2$ et où $g(x) = e^x$.

PARTIE I

Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax + b)$

Pour tout couple (a, b) de \mathbb{R}^2 tel que $|a| \neq 1$, on pose ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_{a,b}(x) = ax + b.$$

On se propose alors de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(g_{a,b}(x))$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b)$.

1. *Étude du cas $|a| < 1$*

On considère ici la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel quelconque donné, et définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$ où le réel a vérifie $|a| < 1$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de x_n en fonction de a, b, x et n .
- (b) Étudier la convergence de la suite (x_n) .
- (c) Vérifier, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$.

- (d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| < 1$.

2. *Étude du cas $|a| > 1$*

- (a) Établir (si $a \neq 0$) l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

- (b) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| > 1$.

PARTIE II

Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

3. *Étude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$*

On suppose ici que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) :

Il existe un nombre réel positif $K < 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \leq K$.

- (a) Établir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, qu'on a pour tout réel x :

$$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$

- (b) En déduire les limites de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
- (c) Étudier enfin le sens de variation de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ et en déduire qu'il existe un unique point fixe de g , c'est-à-dire un unique nombre L tel que $g(L) = L$.

4. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$*

On garde les hypothèses et les notations de la question précédente (on a donc $g(L) = L$), et on considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où $x \in \mathbb{R}$, et définie par $x_{n+1} = g(x_n)$.

- (a) Montrer que la suite (x_n) converge vers L .
- (b) Montrer que si $f \in \mathcal{E}(g)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(L)$.
- (c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$.

5. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$*

On suppose ici que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}') :

Il existe un nombre réel $K > 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \geq K$.

- (a) Montrer que g' ne change pas de signe sur \mathbb{R} , et qu'on a nécessairement :
- ou bien g est strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$,
 - ou bien g est strictement décroissante sur \mathbb{R} et $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$.
- (b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} , définie, continue et dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Exprimer $(g^{-1})'(x)$, et montrer que $\left| (g^{-1})'(x) \right| \leq \frac{1}{K}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Montrer que $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}(g^{-1})$, et en déduire $\mathcal{E}(g)$.

PARTIE III

Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(x^2)$ et $f(x) = f(e^x)$

6. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$*
On suppose dans cette question que $g(x) = x^2$, de sorte que $\mathcal{E}(g)$ désigne donc l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$.
On considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel strictement positif donné, et définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.
- (a) Montrer que g ne vérifie ni l'hypothèse (\mathcal{H}) , ni l'hypothèse (\mathcal{H}')
- (b) Pour tout entier naturel n , vérifier que $x_n = x^{1/2^n}$.
En déduire la convergence de la suite (x_n) , et préciser alors sa limite.
- (c) Établir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $g(x) = x^2$.
7. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$*
Dans cette dernière partie, on cherche des fonctions non constantes f appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$, qui est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(e^x)$.
- (a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, vérifier que $f(0) = f(1)$.
- (b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$ et si $x < 0$, vérifier que $f(x) = f(e^x)$ où $e^x \in]0, 1[$.
- (c) On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$, puis $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— Établir que $x_{n+1} \geq x_n + 1$, puis montrer que (x_n) est strictement croissante et $\lim x_n = +\infty$.
— Établir que la fonction logarithme induit une bijection de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ sur $]x_n, x_{n+1}]$.
— Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, en déduire que : $\forall x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, $f(x) = f(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]x_n, x_{n+1}]$.
- (d) Étant donnée une fonction continue $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition $\varphi(0) = \varphi(1)$, vérifier qu'il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $]0, 1[$.
En déduire l'ensemble $\mathcal{E}(\exp)$.

