

Samedi 11 avril

4 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 :

On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t^2 + 1} dt.$$

- (a) Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
 - (b) Etudier la parité de f .
 - (c) Etudier la monotonie de f .
 - (d) Calculer $f(1)$.
- (a) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a| \leq |b - a|.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a - \frac{b-a}{1+a^2}| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|.$$

- (b) En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .

- Soit $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, \left| \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(xt) \right) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (c) Montrer que :

$$\forall x > 0, \left| \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(xt) \right) dt \right| \leq \frac{|\ln(\varepsilon)|}{x}.$$

- (d) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8}.$$

- On pose :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(x^2 t^2+1)} dt.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt.$$

- (b) En déduire que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$.

- On suppose que $x_0^2 \neq 1$.

- (a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{t}{(t^2+1)(x_0^2 t^2+1)} = \frac{1}{x_0^2 - 1} \left(\frac{x_0^2 t}{x_0^2 t^2 + 1} - \frac{t}{t^2 + 1} \right).$$

- (b) En déduire une expression de $f'(x_0)$ ne faisant pas apparaître d'intégrale.

Problème 2 :

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une valeur propre de u ssi :

$$\ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}.$$

On appelle spectre de u et on note $\text{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u :

$$\text{sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}\}.$$

On admettra dans tous le problème que :

$$\text{sp}(u) \neq \emptyset.$$

Les parties 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes les unes des autres.

Partie 1 : Généralités

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$\lambda \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = \lambda x.$$

(b) Soit $\lambda \in \text{sp}(u)$, soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u^p(x) = \lambda^p x.$$

2. Montrer que :

$$0 \in \text{sp}(u) \iff u \notin GL(E).$$

3. Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E tels que $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$.

(a) Soit p la projection sur F parallèlement à G . Montrer que $\text{sp}(p) = \{0, 1\}$.

(b) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Déterminer $\text{sp}(s)$.

4. Soit $\lambda \in \text{sp}(u)$.

(a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ker((u - \lambda Id_E)^p) \subset \ker((u - \lambda Id_E)^{p+1}).$$

(b) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker((u - \lambda Id_E)^p) = \ker((u - \lambda Id_E)^{p+1})$. Montrer que :

$$\forall k \geq p, \ker((u - \lambda Id_E)^k) = \ker((u - \lambda Id_E)^{k+1}).$$

5. On suppose que $\text{sp}(u) = \{0\}$. Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $u^p \neq 0_E$.

(a) Montrer que $\text{Im}(u^p) \neq \{0_E\}$.

(b) Montrer que $\text{Im}(u^p)$ est stable par u .

(c) On suppose que $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$. On pose :

$$\begin{aligned} v: \text{Im}(u^p) &\rightarrow \text{Im}(u^p) \\ x &\mapsto u(x). \end{aligned}$$

Montrer que $v \in GL(\text{Im}(u^p))$ et en déduire une contradiction.

(d) Montrer que $\dim(\ker(u^p)) < \dim(\ker(u^{p+1}))$.

(e) En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \dim(\ker(u^k)) < \dim(\ker(u^{k+1})).$$

Dans toute la suite du problème, on considère que $n = 3$.

Partie 2 : Cas où $\text{Card}(\text{sp}(u)) = 3$

Dans toute cette partie, on suppose que :

$$\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, soit $e_k \in \ker(u - \lambda_k Id_E) \setminus \{0_E\}$.

6. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E$.

(a) Montrer que $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)e_2 = 0_E$.

(b) En déduire que (e_1, e_2, e_3) est libre.

7. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

8. Montrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Partie 3 : Cas où Card(sp(u)) = 2

Dans toute cette partie, on suppose que :

$$\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ distincts.

9. (a) Montrer que :

$$\ker(u - \lambda_1 Id_E) \cap \ker(u - \lambda_2 Id_E) = \{0_E\}.$$

(b) En déduire que :

$$\dim(\ker(u - \lambda_1 Id_E) + \ker(u - \lambda_2 Id_E)) \leq 3.$$

10. On suppose que $\dim(\ker(u - \lambda_1 Id_E)) = 1$ et $\dim(\ker(u - \lambda_2 Id_E)) = 2$.

Montrer qu'il existe \mathcal{B} base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

11. On suppose que $\dim(\ker(u - \lambda_1 Id_E)) = 1$ et $\dim(\ker(u - \lambda_2 Id_E)) = 1$.

Soit $e_1 \in \ker(u - \lambda_1 Id_E) \setminus \{0_E\}$ et soit $e_2 \in \ker(u - \lambda_2 Id_E) \setminus \{0_E\}$.

(a) i. Montrer qu'il existe $e_3 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E .

ii. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

iii. Montrer que $c = \lambda_1$ ou $c = \lambda_2$.

(b) Quitte à échanger λ_1 et λ_2 , on suppose que $c = \lambda_1$.

i. Calculer le rang de la matrice $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) - \lambda_1 Id_3)^2$.

ii. En déduire que $\dim(\ker(u - \lambda_1 Id_E)^2) = 2$.

(c) Montrer que : $E = \ker(u - \lambda_1 Id_E)^2 \oplus \ker(u - \lambda_2 Id_E)$.

(d) i. Montrer qu'il existe $f_2 \in \ker(u - \lambda_1 Id_E)^2 \setminus \ker(u - \lambda_1 Id_E)$.

ii. On pose $f_1 = (u - \lambda_1 Id_E)(f_2)$ et soit $f_3 \in \ker(u - \lambda_2 Id_E) \setminus \{0_E\}$.

Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .

iii. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

Partie 4 : Cas où Card(sp(u)) = 1

Dans toute cette partie, on suppose que :

$$\text{sp}(u) = \{\lambda\},$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

12. Si $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)) = 3$, que peut-on dire de u ?

13. On pose $v = u - \lambda Id_E$.

(a) Montrer que : $\text{sp}(v) = \{0\}$.

(b) Montrer que $v^3 = 0_E$.

14. On suppose que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)) = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)^2) = 3$ et en déduire que $(u - \lambda Id_E)^2 = 0_E$.

(b) Montrer que $\text{Im}(u - \lambda Id_E) \subset \ker(u - \lambda Id_E)$ et que $\dim(\text{Im}(u - \lambda Id_E)) = 1$.

(c) Soit (e_1) une base de $\text{Im}(u - \lambda Id_E)$.

i. Montrer qu'il existe $e_2 \in E$ tel que $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$.

ii. Montrer qu'il existe $e_3 \in E$ tel que (e_1, e_3) soit une base de $\ker(u - \lambda Id_E)$.

iii. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

(d) Ecrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

15. On suppose que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)) = 1$.

(a) Montrer que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)^2) \neq 1$.

(b) On suppose que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)^2) = 3$. Montrer que $\dim(\text{Im}(u - \lambda Id_E)) \leq 1$ et en déduire une contradiction.

(c) i. Montrer que $\dim(\ker(u - \lambda Id_E)^2) = 2$.

ii. Montrer qu'il existe \mathcal{B} base de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Partie 5 : Fin des cas

16. Montrer que :

$$\text{Card}(\text{sp}(u)) \leq 3.$$