Devoir surveillé n° 7 :

Samedi 21 mars

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :
$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{(1+x)^2}.$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :
$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{4+x}-2}.$$
3. Calculer :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 2 :

On pose :
$$F = \operatorname{Vect}(X^2-X, X^2+1) \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\, P(-1) = P'(-1) = 0\}.$$

1. Déterminer la dimension de F.
2. Déterminer la dimension de G.
3. Montrer que :
$$\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G.$$

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F.
Soit $u \in G$.
Montrer que :
$$\operatorname{rg}(e_1+u, \dots, e_n+u) = n.$$

Problème 1 :
L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction de Lambert notée W.

On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x. \end{array}$$

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1},+\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$).

2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1},+\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1},+\infty[$.
3. **Etude asymptotique en 0**
   (a) Expliciter $W(0)$, $W'(0)$.
   (b) Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$.
   (c) Montrer que W admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité.
4. **Etude asymptotique en** $+\infty$
   (a) Expliciter $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x)$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln W(x) + W(x) = \ln x$.
   (c) En déduire que : $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.
   (d) Montrer que :
   $$W(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ln x - \ln(\ln x) + o(\ln(\ln(x))).$$
5. **Etude asymptotique en** $-e^{-1}$
   (a) Expliciter $W(-e^{-1})$.
   (b) A t-on $W \in DL_0(-e^{-1})$? Si oui, déterminer ce développement limité.
   (c) A t-on $W \in DL_1(-e^{-1})$? Si oui, déterminer ce développement limité.
   (d) On pose : $g: \begin{array}{ccc} [-e^{-1},+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & W(x)+1. \end{array}$.
      i. Montrer que : $\forall x \in [-e^{-1},+\infty[$, $(-1+g(x))e^{g(x)} = ex$.
      ii. Montrer que :
      $$\frac{g^2(x)}{2} \underset{x\to-e^{-1}}{\sim} ex+1.$$
      iii. En déduire que :
      $$W(x) \underset{x\to-e^{-1}}{=} -1 + \sqrt{2(ex+1)} + o(\sqrt{ex+1}).$$
6. **Le théorème binomial d'Abel**
   Cette partie est indépendante des parties précédentes.
   On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ en posant
   $$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!}X(X-ka)^{k-1}.$$
   On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

   (a) Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\quad A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$
   (c) En déduire, pour j et k éléments de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j<k$, $j=k$ ou $j>k$.

   Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que
   $$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$
   (d) Démontrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\quad \alpha_j = P^{(j)}(ja)$.
   (e) En déduire l'identité binomiale d'Abel :
   $$\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$
   (f) Etablir la relation,
   $$\forall (a,y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$
   Ce résultat pourra être utilisé dans la partie suivante.

7. **Développement limité en 0 de la fonction** W

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} x^k + o(x^n).$$

   (c) Montrer que :

$$\forall x \in]-e^{-1}, +\infty[,\ x(1+W(x))W'(x) = W(x).$$

   (d) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) a_j a_{k-j},$$

   où on a posé : $a_0 = 1$.

   (e) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} x^k + o(x^n).$$