Devoir à la maison n° 9 :

A rendre pour le : mardi 7 avril à 8h (casier n°17)

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

La partie A est indépendante du reste du problème.
Certains résultats de la partie B seront utilisés dans la partie C.

Partie A : Etude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.
Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$.
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)P(t)\,dt & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Déterminer $\Psi_a(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   (b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $((X-a)^2P(X))'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
   (b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.
   (c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

Partie B : Etude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$.
   (a) Justifier que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0, x]$ tels que :
   $$f(\alpha_x)\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,dt.$$
   (c) En déduire :
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$
   (d) Montrer que l'on a aussi :
   $$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$

2. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left(\Phi(f)\right)'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\Phi(f)(x)\right).$$

3. (a) Montrer que si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).
   (b) Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.
4. (a) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} \Phi(f) = 0$.
   (b) Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f = l$, alors $\lim\limits_{+\infty} \Phi(f) = \dfrac{l}{2}$.
   (c) Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{-\infty} f = l$, alors $\lim\limits_{-\infty} \Phi(f) = \dfrac{l}{2}$.

Partie C :

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie **dans cette partie sur** $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit f une fonction de E. On note, comme dans la partie B, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt$.

1. Calculer les limites de $x \mapsto \dfrac{h(x)^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \dfrac{h(x)^2}{x^3}$ en 0.
2. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \forall X > \alpha, \int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\, dx = \frac{1}{3}\frac{h(\alpha)^2}{\alpha^3} - \frac{1}{3}\frac{h(X)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\Phi(f)(x)\, dx.$$

3. Montrer que :

$$\forall X > 0, \int_0^X (\Phi(f)(x))^2\, dx \leq \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\, dx.$$