CORRECTION DS 8

Problème 1 :

1-a) Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(xt)}{t^2+1}\,dt$ est définie. Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(-x) = \int_0^1 \frac{\text{Arctan}(-xt)}{1+t^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt = -f(x).$

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Soit $t \in [0,1]$. On a $xt \leq yt$

et comme Arctan croissante $\text{Arctan}(xt) \leq \text{Arctan}(yt)$.

Donc $\dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \leq \dfrac{\text{Arctan}(yt)}{1+t^2}$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{\text{Arctan}(yt)}{1+t^2}\,dt$

D'où $f(x) \leq f(y)$. Ainsi : $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

d) $\displaystyle f(1) = \int_0^1 \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\text{Arctan}^2(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$

Donc $\boxed{f(1) = \dfrac{\pi^2}{32}}$

2-a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}'(x)| = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$.

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\boxed{|\text{Arctan}\, b - \text{Arctan}\, a| \leq |b-a|}$$

b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et, soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\text{Arctan}''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

Donc $|\text{Arctan}''(x)| \leq \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$.

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

$$|\text{Arctan}\, b - \text{Arctan}\, a - (b-a)\text{Arctan}'(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \times 1.$$

D'où $$\left|\text{Arctan}\, b - \text{Arctan}\, a - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

3-a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(x_0 t)}{1+t^2}\,dt\right| \leq \int_0^1 \frac{|\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(x_0 t)|}{1+t^2}\,dt$$

Donc, d'après 2. (a),

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \int_0^1 \frac{|xt-x_0t|}{1+t^2}\,dt$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{|xt-x_0t|}{1+t^2}\,dt = |x-x_0|\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = |x-x_0|\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1$

$$= |x-x_0|\,\frac{\ln 2}{2}.$$

Posons $k=\dfrac{\ln 2}{2}$, on a : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad |f(x)-f(x_0)|\leq k|x-x_0|}$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} k|x-x_0| = 0$ donc, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Ainsi f est continue en x_0. Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

4-a) Soit $x>0$, soit $t\in[0,\varepsilon]$, on a : $0\leq \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(xt)\leq\frac{\pi}{2}$ et $0\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$

Donc $\displaystyle\left|\int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(xt)\right)dt\right| \leq \int_0^\varepsilon \frac{\pi}{2}\,dt$

D'où : $\boxed{\displaystyle\left|\int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(xt)\right)dt\right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon.}$

b) Posons $g:\ \mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}x-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$.

g est dérivable et, soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=0$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or $g(1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$. Ainsi $g=0$.

D'où : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\quad \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)=\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.}$

c) Soit $x>0$,

$$\left|\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(xt)\right)dt\right| = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{xt}\right)dt$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\left|\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{xt}\right)-\operatorname{Arctan}(0)\right|dt$$

$$\leq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\left|\frac{1}{xt}-0\right|dt \quad \text{d'après 2.a.}$$

$$\leq \int_\varepsilon^1 1\cdot\frac{1}{xt}\,dt = \frac{1}{x}\left[\ln t\right]_\varepsilon^1 = -\frac{\ln\varepsilon}{x}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\left|\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(xt)\right)dt\right| \leq \frac{|\ln\varepsilon|}{x}.}$

(3)

d) Soit $x>0$, $\left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(xt)\right) dt \right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \frac{|\ln \varepsilon|}{x}$

Or : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}\left[\text{Arctan}\, t\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$.

Donc $\left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \frac{|\ln \varepsilon|}{x}$.

Posons $A = \frac{|\ln \varepsilon|}{\varepsilon}$; soit $x \geq A$ alors $\frac{|\ln \varepsilon|}{x} \leq \varepsilon$

Donc $\left|\frac{\pi^2}{8} - f(x)\right| \leq \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon$.

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8}}$.

5 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)g(x_0)| \leq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\left|\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(x_0t) - \frac{(xt-x_0t)}{x_0^2t^2+1}\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\frac{(xt-x_0t)^2}{2}\, dt \quad \text{d'après 2.b}$$

Donc : $\boxed{|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)\,g(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$,

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| \leq \frac{|x-x_0|}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$$

Or $\lim_{x\to x_0} \frac{|x-x_0|}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 0$ donc $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = g(x_0)}$.

6-a) Soit $t\in[0,1]$,

$$\frac{1}{x_0^2-1}\left(\frac{x_0^2t}{x_0^2t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)x_0^2t - t(x_0^2t^2+1)}{(x_0^2-1)(x_0^2t^2+1)(t^2+1)} = \frac{x_0^2t - t}{(x_0^2-1)(x_0^2t^2+1)(t^2+1)}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{x_0^2-1}\left(\frac{x_0^2t}{x_0^2t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{t}{(x_0^2t^2+1)(t^2+1)}}$

b) $$f'(x_0) = g(x_0) = \int_0^1 \frac{1}{x_0^2-1}\left(\frac{x_0^2 t}{x_0^2 t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x_0^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln(x_0^2 t^2+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1$$

Donc : $$\boxed{f'(x_0) = \frac{\ln\left(\frac{x_0^2+1}{2}\right)}{2(x_0^2-1)}}$$

Problème 2 :

1-a) Soit $x \in E$, on a : $x \in \ker(u - \lambda Id_E) \iff (u - \lambda Id_E)(x) = 0_E \iff u(x) = \lambda x$.

Donc $\lambda \in sp(u) \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ x \in \ker(u - \lambda Id_E)$

Ainsi $\boxed{\lambda \in sp(u) \iff \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x.}$

b) • Pour $p = 0$, $u^p(x) = Id_E(x) = x = \lambda^p x$.

• Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $u^p(x) = \lambda^p x$.

Alors : $u^{p+1}(x) = u(\lambda^p x) = \lambda^p u(x) = \lambda^p . \lambda x = \lambda^{p+1} x$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ u^p(x) = \lambda^p x}$

2- $0 \in sp(u) \iff \ker(u) \neq \{0_E\}$

$\iff u$ non injectif

Or $u \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie. Donc u injectif $\iff u \in GL(E)$.

Ainsi : $\boxed{0 \in sp(u) \iff u \notin GL(E).}$

3-a) • On a : $\ker p = G \neq \{0_E\}$ et $\ker(p - Id_E) = F \neq \{0_E\}$

Donc $\{0, 1\} \subset sp(p)$.

• Soit $\lambda \in sp(p)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $p(x) = \lambda x$.

Il existe $x_1 \in F$, $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$.

Ainsi $x_1 = \lambda(x_1 + x_2)$ donc $(1-\lambda)x_1 = \lambda x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$.

Donc $(1-\lambda)x_1 = 0_E$ et $\lambda x_2 = 0_E$. Or $x \neq 0_E$ donc $(x_1, x_2) \neq (0_E, 0_E)$

Ainsi $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$. Donc $sp(p) \subset \{0, 1\}$

• Ainsi $\boxed{sp(p) = \{0, 1\}}$

b) • On a : $\ker(s - Id_E) = F \neq \{0_E\}$ et $\ker(s + Id_E) = G \neq \{0_E\}$

Donc $\{-1, 1\} \subset sp(s)$.

• Soit $\lambda \in sp(s)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $s(x) = \lambda x$.

Il existe $x_1 \in F$, $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi $x_1 - x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$

Donc $(1-\lambda)x_1 = (1+\lambda)x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ et $(x_1, x_2) \neq (0_E, 0_E)$

Donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Ainsi $sp(s) \subset \{1, -1\}$

• D'où : $\boxed{sp(s) = \{-1, 1\}.}$

4-a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^p$. Alors $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^p(x) = 0_E$

Donc $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{p+1}(x) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(0_E) = 0_E$.

D'où $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{p+1}$.

Ainsi $\boxed{\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^p \subset \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{p+1}}$.

b) • Pour $k = p$, $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}$

• Soit $k \geq p$, supposons que $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}$

On a : • $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1} \subset \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+2}$

• soit $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+2}$. Alors $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+2}(x) = 0$

Donc $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)\right) = 0_E$.

Ainsi $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1} = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k$.

Donc $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)\right) = 0_E$.

Ainsi $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}(x) = 0_E$. Donc $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}$

Ainsi : $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1} = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+2}$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall k \geq p,\ \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}}$.

5-a) Supposons $\mathrm{Im}\, u^p = \{0_E\}$, alors : $\forall x \in E$, $u^p(x) = 0_E$ donc $u^p = 0_E$ ce qui est absurde.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(u^p) \neq \{0_E\}}$.

b) Soit $y \in \mathrm{Im}(u^p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$.

Donc $u(y) = u^{p+1}(x) = u^p(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^p)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(u^p) \text{ est stable par } u}$.

c) • Soit $x \in \ker v$, alors $v(x) = u(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Im}(u^p)$.

Donc il existe $z \in E$ tel que $x = u^p(z)$. Ainsi $u^{p+1}(z) = 0_E$

Donc $z \in \ker(u^{p+1}) = \ker(u^p)$. Donc $x = u^p(z) = 0_E$.

Ainsi $\ker v = \{0_E\}$ donc v est injectif.

• Comme $\mathrm{Im}(u^p)$ est de dimension finie, $\boxed{v \in GL(\mathrm{Im}(u^p))}$.

- D'après 2, $0 \notin sp(v)$. Or $sp(v) \neq \emptyset$ donc il existe $\lambda \in sp(v)$ tel que $\lambda \neq 0$.

Ainsi il existe $x \in \mathrm{Im}(u^p) \setminus \{0_E\}$ tel que $v(x) = \lambda x$, donc $u(x) = \lambda x$

Ainsi $\lambda \in sp(u)$ donc $\lambda = 0$ $\boxed{\text{ce qui est absurde.}}$

d) On a donc $\ker(u^p) \neq \ker(u^{p+1})$. Or $\ker u^p \subset \ker u^{p+1}$

Donc : $\boxed{\dim \ker u^p < \dim \ker u^{p+1}}$

e) . Supposons qu'il existe $k \in [\![0, p]\!]$ tel que : $\ker u^k = \ker u^{k+1}$.

Alors, d'après 4-b, $\forall j \geq k$, $\ker u^j = \ker u^{j+1}$

Or $p \geq k$ donc $\ker u^p = \ker u^{p+1}$ ce qui est absurde.

. Ainsi $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\ker u^k \neq \ker u^{k+1}$ et $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$

Donc : $\boxed{\forall k \in [\![0, p]\!],\ \dim \ker(u^k) < \dim \ker(u^{k+1})}$

6-a) On a $\alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u(e_2) + \alpha_3 u(e_3) = 0_E$ donc $\lambda_1\alpha_1 e_1 + \lambda_2\alpha_2 e_2 + \lambda_3\alpha_3 e_3 = 0_E$ (1)

De plus $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E$ (2).

(1) $- \lambda_3$(2) donne : $\boxed{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3) e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3) e_2 = 0_E}$ (3)

b) Ainsi $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3) u(e_1) + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3) u(e_2) = 0_E$

Donc $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1 e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2 e_2 = 0_E$ (4)

(4) $- \lambda_2$(3) donne : $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) e_1 = 0_E$.

Or $\lambda_1 \neq \lambda_3$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $e_1 \neq 0_E$ donc $\alpha_1 = 0$.

Ainsi, d'après (4), $\alpha_2 = 0$ et d'après (2) $\alpha_3 = 0$.

Donc : $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est libre.}}$

7- $\mathcal{B}$ est libre et $\mathrm{Card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim E$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$.

8- $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, $u(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $u(e_3) = \lambda_3 e_3$.

Donc : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}$

9-a) Soit $x \in \ker(u - \lambda_1 Id_E) \cap \ker(u - \lambda_2 Id_E)$

On a : $u(x) = \lambda_1 x$ et $u(x) = \lambda_2 x$ donc $(\lambda_2 - \lambda_1)x = 0_E$.

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $x = 0_E$. Ainsi $\boxed{\ker(u - \lambda_1 Id_E) \cap \ker(u - \lambda_2 Id_E) = \{0_E\}}$.

b) On a : $\ker(u - \lambda_1 Id_E) \oplus \ker(u - \lambda_2 Id_E) \subset E$ et $\dim E = 3$

donc $\boxed{\dim \ker(u - \lambda_1 Id_E) + \dim \ker(u - \lambda_2 Id_E) \leq 3}$.

10- . $\dim(\ker(u - \lambda_1 Id_E)) + \dim(\ker(u - \lambda_2 Id_E)) = 3$

et $\ker(u - \lambda_1 Id_E) \cap \ker(u - \lambda_2 Id_E) = \{0_E\}$

donc $\ker(u - \lambda_1 Id_E) \oplus \ker(u - \lambda_2 Id_E) = E$.

. Soit (e_1) une base de $\ker(u - \lambda_1 Id_E)$ et (e_2, e_3) une base de $\ker(u - \lambda_2 Id_E)$.

Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

. $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, $u(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $u(e_3) = \lambda_2 e_3$.

Donc $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale}}$.

11-a) i) Comme $\ker(u - \lambda_1 Id_E) \cap \ker(u - \lambda Id_E) = \{0_E\}$, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est libre.

Donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_3 \in E$ tel que $\boxed{\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ soit une base de } E}$.

ii) On a : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, $u(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $u(e_3) \in E$ donc il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $u(e_3) = a e_1 + b e_2 + c e_3$.

Ainsi $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}$.

iii) $Mat_{\mathcal{B}}(u - c Id_E) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - c & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 - c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $rg(u - c Id_E) \leq 2$

ainsi, $\dim \ker(u - c Id_E) = 3 - rg(u - c Id_E) \geq 1$

Donc $\ker(u - c Id_E) \neq \{0_E\}$. Ainsi $c \in sp(u)$.

Donc $\boxed{c = \lambda_1 \text{ ou } c = \lambda_2}$.

b-i) $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)-\lambda_1 I_3\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)^2 & b(\lambda_2-\lambda_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (9)

Or $\lambda_2-\lambda_1 \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{rg}\left(\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)-\lambda_1 I_3\right)^2\right) = 1.}$

ii) $\dim\left(\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2\right) = \dim\left(\ker \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2\right)$

$= 3 - \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)-\lambda_1 I_3\right)^2$

Donc $\boxed{\dim\left(\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2\right) = 2.}$

c) • $\dim \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 + \dim \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E) = 3 = \dim E.$

• Soit $x \in \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 \cap \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E).$

On a : $u(x)=\lambda_2 x$ donc :

$(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2(x) = (u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)((\lambda_2-\lambda_1)(x)) = (\lambda_2-\lambda_1)^2 x = 0$

Or $\lambda_2 \neq \lambda_1$, donc $x = 0_E$. Ainsi $\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 \cap \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$

• D'où : $\boxed{\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 \oplus \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E) = E}$

d-i) On a $\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \subset \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2$ et $\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \neq \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2$

donc il existe $\boxed{f_2 \in \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 \setminus \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)}$

ii) • $f_3 \neq 0_E$ et $\dim \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E) = 1$ donc (f_3) est une base de $\ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E)$.

• $(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)(f_1) = (u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2(f_2) = 0_E$ donc $f_1 \in \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)$

donc f_2 et f_1 non colinéaires, ainsi (f_1, f_2) libre.

• Or $f_1, f_2 \in \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2$ et $\dim \ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 = 2 = \mathrm{Card}(f_1, f_2)$

Donc (f_1, f_2) est une base de $\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2$.

• Comme $\ker(u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^2 \oplus \ker(u-\lambda_2 \mathrm{Id}_E) = E$, alors

$\boxed{\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } E.}$

iii) $u(f_1) = \lambda_1 f_1$, $u(f_2) = f_1 + \lambda_1 f_2$ et $u(f_3) = \lambda_2 f_3$

Donc : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$

12) Si $\dim(\ker(u-\lambda Id_E))=3$, alors $\ker(u-\lambda Id_E)=E$.

Donc : $\forall x\in E,\ u(x)=\lambda x$. Ainsi $\boxed{u=\lambda Id_E}$

13) a) Soit $\mu\in\mathbb{C}$,

$\mu\in sp(v) \iff \ker(v-\mu Id_E)\neq\{0_E\} \iff \ker(u-(\mu+\lambda)Id_E)\neq\{0_E\}$

$\iff \mu+\lambda\in sp(u) \iff \mu+\lambda=\lambda \iff \mu=0.$

Donc $\boxed{sp(v)=\{0\}}$.

b) Supposons $v^3\neq 0_E$, alors, d'après 5-e, $\forall k\in[\![0,2]\!]$, $\dim\ker(v^k)<\dim(\ker(v^{k+1}))$

Donc $0=\dim\ker(v^0)<\dim\ker(v^1)<\dim\ker(v^2)<\dim\ker(v^3)<\dim\ker(v^4)$

Donc $\dim\ker(v^4)>3=\dim E$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{v^3=0_E}$

14-a) • On a $\dim\ker(u-\lambda Id_E)\leq\dim\ker(u-\lambda Id_E)^2$ donc $2\leq\dim(\ker(u-\lambda Id_E)^2)$

• Si $\dim\ker(u-\lambda Id)^2=2$ alors $\dim\ker(u-\lambda Id_E)=\dim\ker(u-\lambda Id_E)^2$

donc d'après 3.a, $\dim\ker(u-\lambda Id_E)^2=\dim\ker(u-\lambda Id_E)^3$

Donc $2=\dim\ker v^3=3$ ce qui est absurde.

• Ainsi $\boxed{\dim\ker(u-\lambda Id_E)^2=3}$

• D'où $\ker(u-\lambda Id_E)^2=E$. Donc $\boxed{(u-\lambda Id_E)^2=0_E}$

b) • On a : $\forall x\in E$, $(u-\lambda Id_E)((u-\lambda Id_E)(x))=0_E$ donc $(u-\lambda Id_E)(x)\in\ker(u-\lambda Id_E)$

Ainsi $\boxed{\operatorname{Im}(u-\lambda Id_E)\subset\ker(u-\lambda Id_E)}$

• D'après le théorème du rang : $\dim\operatorname{Im}(u-\lambda Id_E)=\dim E-\dim\ker(u-\lambda Id_E)$
$=3-2$

Donc $\boxed{\dim(\operatorname{Im}(u-\lambda Id_E))=1}$.

c) i) Il existe $e_2\in E$ tel que $e_1=(u-\lambda Id_E)(e_2)$ donc $\boxed{u(e_2)=e_1+\lambda e_2}$.

ii) • Comme $\operatorname{Im}(u-\lambda Id_E)\subset\ker(u-\lambda Id_E)$, $e_1\in\ker(u-\lambda Id_E)$

et $e_1\neq 0_E$ donc (e_1) est une famille libre de $\ker(u-\lambda Id_E)$.

• Donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_3\in E$

tel que $\boxed{(e_1,e_3)\text{ soit une base de }\ker(u-\lambda Id_E)}$.

iii) . Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E$

Alors $\alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u(e_2) + \alpha_3 u(e_3) = 0_E$

donc $\alpha_1 \lambda e_1 + \alpha_2 (e_1 + \lambda e_2) + \alpha_3 \lambda e_3 = 0_E$

D'où $\alpha_2 e_1 = 0_E$. Ainsi $\alpha_2 = 0$.

Donc $\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3 = 0_E$ or (e_1, e_3) libre donc $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

Ainsi $\mathcal{B}$ est libre.

. Comme $\text{Card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim E$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E.}$

d) On a $u(e_1) = \lambda e_1$, $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$ et $u(e_3) = \lambda e_3$.

Donc $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}$

15-a) Si $\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2 = 1$, d'après 4-b, $\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^3 = 1$

ce qui contredit $(u - \lambda \text{Id}_E)^3 = 0_E$.

Donc $\boxed{\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2 \neq 1.}$

b) . On a : $(u - \lambda \text{Id}_E)^2 = 0_E$ donc $\text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) \subset \ker (u - \lambda \text{Id}_E)$

Ainsi $\boxed{\dim \text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) \leq 1.}$

. D'après le théorème du rang :

$\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E) = 3 - \dim \text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) \geq 2$

$\boxed{\text{ce qui est absurde.}}$

c-i) On a : $1 \leq \dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2 \leq 3$, $\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E) \neq 1$

et $\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E) \neq 3$, ainsi : $\boxed{\dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2 = 2.}$

ii) . On a : $(u - \lambda \text{Id}_E)^3 = 0_E$ donc $\text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) \subset \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2$

Or $\dim \text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) = 2 = \dim \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2$

Ainsi $\text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) = \ker (u - \lambda \text{Id}_E)^2$

. Soit $e_2 \in \text{Im}\,(u - \lambda \text{Id}_E) \setminus \ker (u - \lambda \text{Id}_E)$

Il existe $e_3 \in E$ tel que $e_2 = (u - \lambda \text{Id}_E)(e_3)$

Posons $e_1 = (u - \lambda \text{Id}_E)(e_2)$. On a $e_1 \neq 0_E$

- On a $e_2 \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2$ donc $e_1 \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

  Ainsi $u(e_1) = \lambda e_1$, $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$ et $u(e_3) = \lambda e_3 + e_2$

- Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E$.

  Alors, en appliquant u : $\alpha_1 \cancel{\lambda e_1} + \alpha_2 e_1 + \alpha_2 \cancel{\lambda e_2} + \cancel{\alpha_3 \lambda e_3} + \alpha_3 e_2 = 0_E$

  Donc $\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2 = 0_E$ et en appliquant u : $\alpha_2 \cancel{\lambda e_1} + \alpha_3 e_1 + \alpha_3 \cancel{\lambda e_2} = 0_E$

  D'où $\alpha_3 e_1 = 0_E$. Ainsi $\alpha_3 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 = 0$.

  Ainsi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre.

- Comme $\mathrm{Card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim E$, $\mathcal{B}$ est une base de E et :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

16 – . Posons $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts.

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit $e_k \in \ker(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) \setminus \{0_E\}$.
- Montrons que : pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(e_1, \dots, e_j)$ est libre.
  - Pour $j = 1$, $e_1 \neq 0_E$ donc (e_1) est libre.
  - Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $(e_1, \dots, e_j)$ libre.

    Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k e_k = 0_E$ (1)

    Alors, en appliquant u : $\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0_E$ (2)

    Donc, $(2) - \lambda_{j+1}(1)$ donne $\sum_{k=1}^{j} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{j+1}) e_k = 0_E$.

    Or $(e_1, \dots, e_j)$ est libre, donc : $\forall k \in [\![1, j]\!]$, $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{j+1}) = 0$

    Or : $\forall k \in [\![1, j]\!]$, $\lambda_k - \lambda_{j+1} \neq 0$ donc : $\forall k \in [\![1, j]\!]$ $\alpha_k = 0$

    D'où $\alpha_{j+1} e_{j+1} = 0_E$ donc $\alpha_{j+1} = 0$

    Donc $(e_1, \dots, e_j)$ est libre.

  - Donc, par récurrence finie, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
- Ainsi $\mathrm{Card}(e_1, \dots, e_n) \leq \dim E$. Or $n = \mathrm{Card}(\mathrm{sp}(u))$

  Donc $\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathrm{sp}(u)) \leq 3}$