CORRECTION DS 7

Exercice 1 :

1) $$\frac{\cos x}{(1+x)^2} = (\cos x)(1+x)^{-2}$$

$$\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(1-2x+(-2)(-3)\frac{x^2}{2}+(-2)(-3)(-4)\frac{x^3}{6}+(-2)(-3)(-4)(-5)\frac{x^4}{24}\right)+o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4\right)+o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Donc : $$\boxed{\frac{\cos x}{(1+x)^2} \underset{0}{=} 1-2x+\frac{5}{2}x^2-3x^3+\frac{85}{24}x^4+o(x^4)}$$

2) $$\frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{4+x}-2} = \frac{\operatorname{Arctan} x}{2\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right)} \underset{0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{2\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^2}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{6}\cancel{-1}+o(x^3)\right)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{x\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)}{\frac{2x}{8}\left(1-\frac{x}{16}+\frac{x^2}{128}+o(x^2)\right)}$$

$$\underset{0}{=} 4\,\frac{1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{1-\frac{x}{16}+\frac{x^2}{128}+o(x^2)}$$

$$\underset{0}{=} 4\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\left(1+\frac{x}{16}-\frac{x^2}{128}+\left(\frac{x}{16}\right)^2\right)+o(x^2)$$

$$\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{3}\right)\left(4+\frac{x}{4}-\frac{1}{64}x^2\right)+o(x^2)$$

$$\underset{0}{=} 4+\frac{x}{4}-\frac{1}{64}x^2-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)$$

Donc : $$\boxed{\frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{4+x}-2} \underset{0}{=} 4+\frac{x}{4}-\frac{259}{192}x^2+o(x^2)}$$

3) $$\ln(1+x)-\sin(x) \underset{0}{=} \cancel{x}-\frac{x^2}{2}-\cancel{x}+o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Donc $$\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}.$$ Ainsi : $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}}.$$

Exercice 2 :

1) • (X^2-X, X^2+1) est génératrice de F

• Comme X^2-X et X^2+1 ne sont pas colinéaires, (X^2-X, X^2+1) est libre.

• Donc (X^2-X, X^2+1) est une base de F. Ainsi

$$\boxed{\dim F = \text{Card}(X^2-X, X^2+1) = 2}$$

2) $G = \left\{ aX^2+bX+c, \begin{cases} a-b+c=0 \\ -2a+b=0 \end{cases} \right\}$

$= \left\{ aX^2+bX+c, \begin{cases} c=a \\ b=2a \end{cases} \right\}$.

$= \{ aX^2+2aX+a, \ a\in\mathbb{R} \} = \{ a(X^2+2X+1), a\in\mathbb{R} \}$.

$= \text{Vect}(X^2+2X+1)$.

Comme $X^2+2X+1 \neq 0$, (X^2+2X+1) est libre et est donc une base de G.

Ainsi $\boxed{\dim G = \text{Card}(X^2+2X+1) = 1.}$

3) • Soit $P\in F\cap G$. Il existe $\lambda, \mu \in\mathbb{R}$ tels que $P = \lambda(X^2-X)+\mu(X^2+1)$

De plus $P(-1)=0$ et $P'(-1)=0$ donc : $\begin{cases} 2\lambda+2\mu=0 \\ -3\lambda-2\mu=0 \end{cases}$. Ainsi $\lambda=\mu=0$

Donc $P=0$. D'où $F\cap G=\{0\}$.

• De plus : $\dim F+\dim G = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

• Donc $\boxed{F\oplus G = \mathbb{R}_2[X]}$

Exercice 3 :

• Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in\mathbb{K}$. Supposons : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_k+u) = 0_E$.

Alors : $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k = -\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)u \in F\cap G$. Or $F\cap G=\{0_E\}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k = 0_E$. Or $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Donc : $\forall k\in[\![1,n]\!], \lambda_k=0$

Ainsi $(e_1+u, \dots, e_n+u)$ est libre.

• Donc : $\boxed{\text{rg}(e_1+u, \dots, e_n+u) = \text{Card}(e_1+u, \dots, e_n+u) = n.}$

Problème 1 :

1) • f est continue sur $\mathbb{R}$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x+1)e^x$.

Ainsi : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) > 0$ et $f'(-1) = 0$

Donc f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

• Donc $\boxed{f \text{ est bijective de } [-1,+\infty[\text{ vers } [f(-1), \lim_{+\infty} f[= [-e^{-1},+\infty[}$

2) • f est continue sur $[-1,+\infty[$ donc $\boxed{W \text{ est continue sur } [-e^{-1},+\infty[.}$

• f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) \neq 0$.

Donc $\boxed{W \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-e^{-1},+\infty[.}$

3-a). On a $f(0) = 0$ et $0 \in [-1,+\infty[$ donc $\boxed{W(0) = 0}$.

• $\forall x \in]-e^{-1},+\infty[,\quad W'(x) = \dfrac{1}{f'(W(x))}$

Donc $W'(0) = \dfrac{1}{f'(W(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$. Ainsi $\boxed{W'(0) = 1}$.

b) Comme $W \in \mathcal{C}^\infty(]-e^{-1},+\infty[)$, d'après la formule de Taylor-Young, $W \in DL_1(0)$

et $W(x) \underset{0}{=} W(0) + xW'(0) + o(x)$. Donc $W(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

Ainsi : $\boxed{W(x) \underset{0}{\sim} x.}$

c) • $W \in \mathcal{C}^\infty(]-e^{-1},+\infty[)$ donc, d'après la formule de Taylor-Young : $\boxed{W \in DL_3(0)}$

• Ainsi, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $W(x) \underset{0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$.

Donc, par troncature : $W(x) \underset{0}{=} a + bx + o(x)$. Or : $W(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

Donc, par unicité du développement limité :

$$W(x) \underset{0}{=} x + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$$

• $f(x) \underset{0}{=} x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$\underset{0}{=} x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$

et $\lim\limits_{x \to 0} W(x) = 0$ donc, par composition :

$$f(W(x)) \underset{0}{=} x+cx^2+dx^3+(x+cx^2+dx^3)^2+\frac{1}{2}(x+cx^2+dx^3)^3+o(x^3)$$ (4)

Donc : $x \underset{0}{=} x+cx^2+dx^3+x^2+2cx^3+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

D'où : $x \underset{0}{=} x+(c+1)x^2+(d+2c+\frac{1}{2})x^3+o(x^3)$

Ainsi, par unicité des développements limités : $\begin{cases} c+1=0 \\ d+2c+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$.

Donc $c=-1$ et $d=\frac{3}{2}$.

Donc : $\boxed{W(x) \underset{0}{=} x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)}$

4- a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} W(x)=+\infty}$.

b) Soit $x\in]0,+\infty[$, on a $f(W(x))=x$ donc $W(x)e^{W(x)}=x$.

Ainsi $\ln(W(x)e^{W(x)})=\ln x$.

D'où : $\boxed{\ln W(x)+W(x)=\ln x}$.

c) Soit $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln W(x)}{W(x)}+1=\dfrac{\ln x}{W(x)}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln W(x)}{W(x)}=0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{W(x)}=1$. D'où : $\boxed{W(x)\underset{+\infty}{\sim}\ln x}$.

d) On a : $\forall x\in]0,+\infty[$, $W(x)=\ln x-\ln W(x)$.

Soit $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln W(x)}{\ln(\ln x)}=\dfrac{\ln\left(\frac{W(x)}{\ln x}\cdot\ln x\right)}{\ln(\ln x)}=\dfrac{\ln\left(\frac{W(x)}{\ln x}\right)+\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)}$

$$=\frac{\ln\left(\frac{W(x)}{\ln x}\right)}{\ln(\ln x)}+1.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{W(x)}{\ln x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln W(x)}{\ln(\ln x)}=1.$$

Ainsi $\ln W(x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(\ln x)$. Donc $\ln W(x)\underset{+\infty}{=}\ln(\ln x)+o(\ln(\ln x))$

Donc : $\boxed{W(x)\underset{+\infty}{=}\ln x-\ln(\ln x)+o(\ln(\ln x))}$

5-a) On a : $f(-1) = -e^{-1}$ et $-1 \in [-1, +\infty[$ donc $\boxed{W(-e^{-1}) = -1}$

b) W est continue en $-e^{-1}$ donc $\boxed{W \in DL_0(-e^{-1}) \text{ et } W(x) \underset{-e^{-1}}{=} -1 + o(1)}$

c) Comme $f'(-1) = 0$, W n'est pas dérivable en $-e^{-1}$. Ainsi : $\boxed{W \notin DL_1(-e^{-1})}$.

d-i) Soit $x \in [-e^{-1}, +\infty[$. On a : $f(W(x)) = x$.

Donc $W(x) e^{W(x)} = x$. Ainsi $W(x) e^{W(x)+1} = xe$.

D'où : $\boxed{(-1 + g(x)) e^{g(x)} = ex.}$

ii) On a : $\lim\limits_{x \to -e^{-1}} g(x) = W(-e^{-1}) + 1 = 0$ donc :

$$(-1+g(x)) e^{g(x)} \underset{-e^{-1}}{=} (-1+g(x)) \left(1 + g(x) + \frac{1}{2} g(x)^2 + o(g(x)^2)\right)$$

$$\underset{-e^{-1}}{=} -1 - g(x) - \frac{1}{2} g(x)^2 + g(x) + g(x)^2 + o(g(x)^2)$$

$$\underset{-e^{-1}}{=} -1 + \frac{1}{2} g(x)^2 + o(g(x)^2)$$

Donc $ex \underset{-e^{-1}}{=} -1 + \frac{1}{2} g(x)^2 + o(g(x)^2)$

Ainsi $ex + 1 \underset{-e^{-1}}{=} \frac{1}{2} g(x)^2 + o(g(x)^2)$

D'où : $\boxed{ex + 1 \underset{-e^{-1}}{\sim} \frac{1}{2} g(x)^2}$

iii) On a donc : $g(x) \underset{-e^{-1}}{\sim} \sqrt{2(ex+1)}$

D'où : $g(x) \underset{-e^{-1}}{=} \sqrt{2(ex+1)} + o\left(\sqrt{ex+1}\right)$.

Ainsi $\boxed{W(x) \underset{-e^{-1}}{=} -1 + \sqrt{2(ex+1)} + o\left(\sqrt{ex+1}\right)}$

6 - a) On a $\deg A_0 = 0$ et : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg A_k = 1 + k - 1 = k$

donc $\boxed{(A_0, \dots, A_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

• si $k \neq 1$, $A_k'(X) = \frac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \frac{1}{k!} X . (k-1)(X - ka)^{k-2}$

$$= (X - ka)^{k-2} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{1}{k}(X - ka) + \frac{k-1}{k} X \right)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} (X - a - (k-1)a)^{k-2} (X - a)$$

$$= A_{k-1}(X - a)$$

• si $k = 1$, $A_k = X$ donc $A_k'(X) = 1 = A_{k-1}(X-a)$.

Dans tous les cas : $\boxed{A_k'(X) = A_{k-1}(X-a).}$

c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

• si $k = 0$, $A_k = 1$ donc : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases}$
$= \delta_{j,k}$.

• si $k \neq 0$, comme $A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$, on a, par récurrence :
$\forall j \in [\![0, k]\!]$, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja)$
Ainsi, si $j \leq k$, $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k-j > 0 \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$

et, si $k > j$, $A_k^{(j)}(X) = 0$ donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

Dans tous les cas : $\boxed{A_k^{(j)}(ja) = \delta_{j,k}}$

d) Soit $j \in [\![0, n]\!]$, $P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{j,k}$.

Donc : $\boxed{P^{(j)}(ja) = \alpha_j}$

e) Soient $a, x, y \in \mathbb{C}$. Posons $P = (X+y)^n$.

On a : $$P = \sum_{\ell=0}^{n} P^{(\ell)}(\ell a) A_\ell$$
$$= P(0) + \sum_{\ell=1}^{n} P^{(\ell)}(\ell a) \frac{1}{\ell!} X(X-\ell a)^{\ell-1}.$$

Or : $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $P^{(\ell)} = \frac{n!}{(n-\ell)!}(X+y)^{n-\ell}$

Donc $$P = P(0) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}(\ell a+y)^{n-\ell} \frac{1}{\ell!} X(X-\ell a)^{\ell-1}.$$

Ainsi, en évaluant en x :
$$\boxed{(x+y)^n = y^n + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} x(x-\ell a)^{\ell-1}(y+\ell a)^{n-\ell}.}$$

f) Soient $a, y \in \mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(x-\ell a)^{\ell-1}(y+\ell a)^{n-\ell}.$$

Or la dérivée de $x \mapsto (x+y)^n$ est $x \mapsto n(x+y)^{n-1}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = n(0+y)^{n-1} = ny^{n-1}$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(x-\ell a)^{\ell-1}(y+\ell a)^{n-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(-\ell a)^{\ell-1}(y+\ell a)^{n-\ell}$.

Ainsi : $$\boxed{ny^{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(-\ell a)^{\ell-1}(y+\ell a)^{n-\ell}.}$$

7-a) $W \in \mathcal{C}^\infty(]-e^{-1}, +\infty[)$, donc, d'après la formule de Taylor-Young : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W \in DL_n(0)$.

Ainsi il existe une suite (a_n) telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W(x) \underset{0}{=} \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell + o(x^n).$$

Comme $W(0) = 0$, on a : $a_0 = 0$.

Ainsi : $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W(x) \underset{0}{=} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell x^\ell + o(x^n).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $W' \in \mathcal{C}^\infty(]-e^{-1}, +\infty[)$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, il existe une suite (b_n) telle que :

$$W'(x) \underset{0}{=} \sum_{l=0}^{n} b_l x^l + o(x^n)$$

Par primitivation et troncature :

$$W(x) \underset{0}{=} W(0) + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{b_l}{l+1} x^{l+1} + o(x^n)$$

$$\underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} \frac{b_{l-1}}{l} x^l + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité : $\forall l \in [\![1, n]\!]$, $\frac{b_{l-1}}{l} = a_l$.

Donc : $\forall l \in [\![1, n]\!]$, $b_{l-1} = l a_l$.

Ainsi : $\boxed{W'(x) \underset{0}{=} \sum_{l=0}^{n} (l+1) a_{l+1} x^l + o(x^n).}$

c) Soit $x \in]-e^{-1}, +\infty[$, $W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}$

Donc $(W(x)+1) W'(x) = e^{-W(x)}$

Or $f(W(x)) = x$ donc $W(x) e^{W(x)} = x$.

Ainsi $x (W(x)+1) W'(x) = W(x) e^{W(x)} \cdot e^{-W(x)}$

D'où : $\boxed{x (W(x)+1) W'(x) = W(x)}$

d) $$x (W(x)+1) W'(x) \underset{0}{=} x \left(\sum_{l=1}^{n} a_l x^l + 1 \right) \left(\sum_{l=0}^{n} (l+1) a_{l+1} x^l \right) + o(x^{n+1})$$

$$\underset{0}{=} x \left(\sum_{l=0}^{n} a_l x^l \right) \left(\sum_{l=0}^{n} (l+1) a_{l+1} x^l \right) + o(x^{n+1})$$

en posant $a_0 = 1$

$$\underset{0}{=} x \sum_{l=0}^{n} c_l x^l + o(x^{n+1})$$

où : $\forall l \in [\![0, n]\!]$, $c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j (k-j+1) a_{k-j+1}$

Ainsi $$W(x) \underset{0}{=} \sum_{l=0}^{n} c_l x^{l+1} + o(x^{n+1})$$

$$\underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} c_{l-1} x^l + o(x^n) \quad \text{par troncature.}$$

Ainsi, par unicité du développement limité ; soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$a_k = c_{k-1}$ donc : $\boxed{a_k = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)\, a_j\, a_{k-j}}$

e) . Pour $k=1$, d'après 3.b, $a_1 = 1$ donc $a_k = \dfrac{(-k)^{k-1}}{k!}$

. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $a_j = \dfrac{(-j)^{j-1}}{j!}$

$$a_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} (k+1-j)\, a_j\, a_{k+1-j} = (k+1)\, a_0\, a_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (k+1-j)\, a_j\, a_{k+1-j}$$

Donc $$-k\, a_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} (k+1-j)\, a_j\, a_{k+1-j}.$$

Ainsi $$a_{k+1} = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (k+1-j) \frac{(-j)^{j-1}}{j!} \frac{\left(-(k+1-j)\right)^{k+1-j-1}}{(k+1-j)!}$$

$$= -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!\,(k-j)!} (-j)^{j-1} \left(-(k+1)+j\right)^{k-j}$$

$$= -\frac{1}{k\, k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-j)^{j-1} \left(-(k+1)+j\right)^{k-j}.$$

Donc, d'après 6.f appliquée à $a = 1$ et $y = -(k+1)$.

$$a_{k+1} = -\frac{1}{k\, k!}\, k \left(-(k+1)\right)^{k-1} = -\frac{\left(-(k+1)\right)^{k-1}}{k!}$$

$$= \frac{-(k+1)\left(-(k+1)\right)^{k-1}}{(k+1)!} = \frac{\left(-(k+1)\right)^{k}}{(k+1)!}$$

. Ainsi, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \frac{(-k)^{k-1}}{k!}}$$