CORRECTION
DM 9

Partie A :

1- • Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\Psi_a(\lambda P + \mu Q) = 2(\lambda P + \mu Q) + (X-a)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda(2P + (X-a)P') + \mu(2Q + (X-a)Q')$$
$$= \lambda \Psi_a(P) + \mu \Psi_a(Q)$$

Donc Ψ_a est linéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$ ainsi $\deg((X-a)P') \leq n$.

Donc $\deg \Psi_a(P) \leq n$. Ainsi $\Psi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

• Donc : $\boxed{\Psi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

2-a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

• si $k \neq 0$, $\Psi_a(X^k) = 2X^k + (X-a) \cdot kX^{k-1} = (2+k)X^k - akX^{k-1}$

• si $k = 0$ $\Psi_a(X^k) = 2$.

Ainsi $\boxed{\Psi_a(X^k) = \begin{cases} (2+k)X^k - akX^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 2 & \text{si } k = 0 \end{cases}}$

b) On a : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg \Psi_a(X^k) = k$ donc $(\Psi_a(X^k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $(X^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ alors :

$$\boxed{\Psi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X])}.$$

c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

• si $k \neq 0$, $\Psi_a(Q_k) = 2(X-a)^k + (X-a) \cdot k(X-a)^{k-1} = (2+k)(X-a)^k = (2+k)Q_k$

• si $k = 0$, $\Psi_a(Q_k) = 2 = (2+k)Q_k$.

Donc $\boxed{\Psi_a(Q_k) = (2+k)Q_k}$.

3-a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$((X-a)^2 P(X))' = 2(X-a)P(X) + (X-a)^2 P'(X) = (X-a)(2P+(X-a)P')$$

Donc $\boxed{((X-a)^2 P(X))' = (X-a)\Psi_a(P)}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, soit $x \in \mathbb{R}$,

- si $x \neq a$,

$$\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{(x-a)^2}\left[(t-a)^2 P(t)\right]_a^x$$
$$= P(x)$$

- si $x = a$, $\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{\Psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(a)}{2} = P(a)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = P(x)$.

Ainsi $\boxed{\Phi_a(\Psi_a(P)) = P}$.

c) On a donc $\Phi_a \circ \Psi_a = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$. Or $\Psi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X])$

Donc $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$. Ainsi $\boxed{\Phi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X])}$

et $\Phi_a^{-1} = (\Psi_a^{-1})^{-1}$ donc : $\boxed{\Phi_a^{-1} = \Psi_a}$.

Partie B :

1-a) Comme $t \mapsto t f(t)$ est continue, h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = x f(x).}$$

b). f est continue sur le segment $[0,x]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha_x, \beta_x \in [0,x]$ tels que :

$$\forall t \in [0,x],\quad f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x).$$

- Ainsi $\int_0^x f(\alpha_x)t\,dt \leq \int_0^x f(t)t\,dt \leq \int_0^x f(\beta_x)t\,dt$

D'où : $\boxed{f(\alpha_x)\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,dt}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a donc :

$$f(\alpha_x)\frac{x^2}{2} \leq h(x) \leq f(\beta_x)\frac{x^2}{2}.$$

D'où : $$\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$$

Or, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha_x = \lim\limits_{x\to 0^+} \beta_x = 0$.

Et, comme f est continue en 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\alpha_x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(\beta_x) = f(0)$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, de même que précédemment, il existe $\alpha_x, \beta_x \in [x, 0]$ tels que :

$$\forall t \in [x,0],\ f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$$

Ainsi $\forall t \in [x,0]$, $t f(\beta_x) \leq t f(t) \leq t f(\alpha_x)$

D'où $$f(\beta_x)\int_x^0 t\,dt \leq \int_x^0 t f(t)\,dt \leq f(\alpha_x)\int_x^0 t\,dt$$

Donc $$f(\alpha_x)\frac{x^2}{2} \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x)\frac{x^2}{2}$$

Ainsi $$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}}.$$

2- • On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. Donc $\Phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(f)(x) = \frac{f(0)}{2} = \Phi(f)(0)$ donc $\Phi(f)$ est continue en 0.

• Ainsi $\boxed{\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $$\Phi(f)'(x) = \frac{h'(x)x^2 - h(x).2x}{x^4} = \frac{xf(x).x^2 - h(x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\frac{h(x)}{x^2}\right)$$

Donc $$\boxed{\Phi(f)'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\Phi(f)(x)\right)}$$

3-a) Supposons f paire (resp. impaire)

. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} t f(t)\,dt$.

On effectue le changement de variable $u = -t$, on a $du = -dt$ donc

$$\phi(f)(-x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x (-u) f(-u)\,du = \frac{1}{x^2}\int_0^x u f(-u)\,du$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x u f(u)\,du \quad \left(\text{resp. } -\frac{1}{x^2}\int_0^x u f(u)\,du\right)$$

$$= \phi(f)(x) \quad (\text{resp. } -\phi(f)(x)).$$

. $\phi(f)(0) = \frac{f(0)}{2} = 0$ si f impaire.

Donc $\boxed{\phi(f) \text{ est paire (resp. impaire).}}$

b) Supposons $f \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

. si $x = 0$, $\phi(f)(x) = \frac{f(0)}{2} \geq 0$

. si $x > 0$, $\forall t \in [0, x]$, $t f(t) \geq 0$ donc $\phi(f)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt \geq 0$

. si $x < 0$, $\forall t \in [x, 0]$, $t f(t) \leq 0$ donc $\frac{1}{x^2}\int_x^0 t f(t)\,dt \leq 0$

Ainsi $\phi(f)(x) = -\frac{1}{x^2}\int_x^0 t f(t)\,dt \geq 0$.

Donc : $\boxed{\phi(f) \geq 0.}$

4-a) Supposons $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \geq A$,

$$|\phi(f)(x)| = \frac{1}{x^2}\left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^A t|f(t)|\,dt + \frac{1}{x^2}\int_A^x t|f(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{x^2}\int_0^A t|f(t)|\,dt + \frac{1}{x^2}\,\frac{\varepsilon}{2}\int_A^x t\,dt$$

$$\leq \frac{1}{x^2}\int_0^A t|f(t)|\,dt + \frac{1}{x^2}\,\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(x^2 - A^2)}{2}$$

$$\leq \frac{1}{x^2}\int_0^A t|f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{4}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^A t\,|f(t)|\,dt = 0$ donc, il existe $B\in\mathbb{R}$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad x \geq B \Rightarrow \frac{1}{x^2}\int_0^A t\,|f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \geq \max(A,B)$, on a :

$$|\Phi(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = 0.}$

b) Supposons $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$, alors $\lim\limits_{+\infty}(f-\ell) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty}\Phi(f-\ell) = 0$

Or : $\Phi(f-\ell) = \Phi(f) - \Phi(\ell)$

De plus $\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(\ell) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,\ell\,dt = \frac{\ell}{2} & \text{si } x\neq 0 \\ \frac{\ell}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Donc $\Phi(f-\ell) = \Phi(f) - \frac{\ell}{2}$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{+\infty}\Phi(f) = \frac{\ell}{2}.}$

c) Posons $g : x \mapsto f(-x)$. On a : $\lim\limits_{+\infty} g = \ell$ donc $\lim\limits_{+\infty}\Phi(g) = \frac{\ell}{2}$.

Or, soit $x\in\mathbb{R}$,

. si $x\neq 0$, $\Phi(g)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t f(-t)\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x}(-u)f(u)(-du)$

$= \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} u f(u)\,du = \Phi(f)(-x)$

. si $x = 0$, $\Phi(g)(x) = \frac{g(0)}{2} = \frac{f(0)}{2} = \Phi(f)(0) = \Phi(f)(-x)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(f)(-x) = \frac{\ell}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{-\infty}\Phi(f) = \frac{\ell}{2}.}$

<u>Partie C :</u>

1) On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}}$

Soit $x>0$, $\frac{h(x)^2}{x^3} = x\,\frac{h(x)^2}{x^4}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)^2}{x^3} = 0.}$

2- Soit $\alpha > 0$, soit $X > \alpha$.

$$\int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,dx = \int_\alpha^X h(x)^2 \cdot \frac{1}{x^4}\,dx.$$

On effectue l'intégration par parties: $u(x) = h(x)^2$ $\quad u'(x) = 2h(x)h'(x) = 2x\,h(x) f(x)$

$v'(x) = \frac{1}{x^4}$ $\quad v(x) = -\frac{1}{3x^3}$

$$\int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,dx = \left[-\frac{h(x)^2}{3x^3}\right]_\alpha^X + \frac{2}{3}\int_\alpha^X \frac{h(x) f(x)}{x^2}\,dx$$

Donc : $\boxed{\int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{1}{3}\frac{h(\alpha)^2}{\alpha^3} - \frac{1}{3}\frac{h(X)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx.}$

3- Soit $X > 0$, soit $\alpha \in]0, X[$.

$$\int_\alpha^X \phi(f)(x)^2\,dx = \int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,dx = \frac{1}{3}\frac{h(\alpha)^2}{\alpha^3} - \frac{1}{3}\frac{h(X)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\phi(f)(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{3}\frac{h(\alpha)^2}{\alpha^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx.$$

Or . $\lim_{\alpha \to 0} \frac{h(\alpha)^2}{\alpha^3} = 0$

. Soit F une primitive de $\phi(f)^2$ sur $\mathbb{R}^+$, alors F est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $\int_\alpha^X \phi(f)(x)^2\,dx = F(X) - F(\alpha)$ donc $\lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^X \phi(f)(x)^2\,dx$

$= F(X) - F(0) = \int_0^X \phi(f)(x)^2\,dx$

. De même: $\lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx.$

Donc, par passage à la limite: $\boxed{\int_0^X \phi(f)(x)^2\,dx \leq \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx.}$