PCSI 1 **Programme de colles** 2024/2025

Semaine 26 du 5 mai au 9 mai

Cours :

- **Chapitre 19 : Applications linéaires**
  - I Généralités
  - II Endomorphismes
  - III Applications linéaires en dimension finie
  - IV Théorème du rang
  - V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie
  - VI Equations linéaires
- **Chapitre 20 : Matrices et applications linéaires**
  - I Matrice d'une application linéaire dans des bases
  - II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice
  - III Changements de bases
  - IV Systèmes linéaires

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image d'une application linéaire et théorème du rang *(ch 19, proposition 26 et théorème 4)*

Q_2 : Unicité, à une constante multiplicative près, de la forme linéaire définissant un hyperplan *(ch 19, proposition 29)*

Q_3 : Propriétés des matrices de passage *(ch 20, proposition 17)*

T_1 : *Ch 20, exemple 5*

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P'$.

(a) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.

(b) La matrice A de f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

(c) Que peut-on en déduire pour f ?

T_2 : *Ch 20, exemple 11*

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array}$$

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

(c) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

(d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

PCSI 1 — **Programme de colles** — 2024/2025

Semaine 26 du 5 mai au 9 mai

Cours :

- **Chapitre 19 : Applications linéaires**
  - I Généralités
  - II Endomorphismes
  - III Applications linéaires en dimension finie
  - IV Théorème du rang
  - V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie
  - VI Equations linéaires
- **Chapitre 20 : Matrices et applications linéaires**
  - I Matrice d'une application linéaire dans des bases
  - II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice
  - III Changements de bases
  - IV Systèmes linéaires

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image d'une application linéaire et théorème du rang *(ch 19, proposition 26 et théorème 4)*

Q_2 : Unicité, à une constante multiplicative près, de la forme linéaire définissant un hyperplan *(ch 19, proposition 29)*

Q_3 : Propriétés des matrices de passage *(ch 20, proposition 17)*

T_1 : *Ch 20, exemple 5*

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P'$.

(a) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.

(b) La matrice A de f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

(c) Que peut-on en déduire pour f ?

T_2 : *Ch 20, exemple 11*

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array}$$

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

(c) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

(d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.