Indications
DM 11

Problème 1 :

1. (a)
   (b) On peut éviter de montrer que la famille est génératrice.
   (c) Exprimer $(f \circ f - 2f)(u)$ en fonction de u et $(f \circ f - 2f)(f(u))$ en fonction de $f(u)$.
   Utiliser le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base.
   (d) Trouver une fonction g telle que $f \circ g = g \circ f = Id_E$.
2. (a) On peut éviter de montrer que la famille est génératrice.
   (b) Décomposer $\varphi \circ \varphi(u)$ dans la base $(u, \varphi(u))$: $\varphi \circ \varphi(u) = -\lambda\varphi(u) - \mu u$ et utiliser le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base.
   (c) Trouver une fonction g telle que $f \circ g = g \circ f = Id_E$.
   (d) Si $\mu = 0$ et $\varphi \in GL(E)$, montrer que φ est une homothétie.
3. (a) $E = \text{Vect}(\dots)$ prouve que E est un espace vectoriel.
   (b) Le plus dur est de montrer que φ est à valeurs dans E, c'est-à-dire que si $f \in E$, alors $\varphi(f) \in E$.
   (c) C'est une famille de deux vecteurs.
   (d) Utiliser une des questions précédentes.
   (e) Faire le calcul pour $f = f_1$ et conclure avec un argument d'unicité.
   (f) Utiliser une des questions précédentes.
   (g) Justifier que $\varphi^{-1}(f_1)$ une primitive de f_1 et la calculer.

Problème 2 :

1.
2. (a) Utiliser le théorème de la base incomplète et le théorème du rang.
   (b) Remarquer que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$ et éliminer les vecteurs nuls. Conclure en comptant les vecteurs.
   (c) Montrer que l'égalité est vraie pour les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ qui forment une base de E.