Devoir à la maison n° 6 :

A rendre pour le : lundi 13 janvier

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer X_0 et X_1.
   (b) Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de n et des puissances de A.
2. On pose :
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   On pose $T = P^{-1}AP$.
   (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n.
   (c) Montrer que :
   $$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. (a) Sans aucun calcul, que pouvez-vous dire de l'expression de T^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
4. (a) Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Problème 2 :

Le but du problème est de déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(E) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2.$$

1. Déterminer toutes les fonctions constantes vérifiant (E).
   On considère dans toute la suite $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ non constante vérifiant (E).
2. Montrer que $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
3. Montrer que si f vérifie (E) alors $-f$ vérifie (E).
   On considère dans toute la suite que $f(0) = 1$.
4. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$. On pourra raisonner par l'absurde et calculer $f(\frac{x}{2^n})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.
5. Etudier la parité de f.
6. On pose $\varphi = \ln \circ f$.
   (a) Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner une équation fonctionnelle vérifiée par φ.
7. On pose $\lambda = \varphi(1)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(n) = \lambda n^2$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(nx) = n^2\varphi(x)$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ \varphi(x) = \lambda x^2$.
   (d) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \lambda x^2$.
8. Conclure.