# CORRECTION DS 3

## Exercice 1 :

1) $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx$ donc $\boxed{u_0 = \frac{\pi}{4}.}$

2) $u_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$ donc $\boxed{u_2 = 1.}$

3-a) $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

On effectue le changement de variable $t = \sin x$. On a : $dt = \cos x \, dx$ donc :

$$\boxed{u_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1 - t^2}}$$

b) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \ \frac{1}{1-t^2} = \frac{\lambda_1}{t-1} + \frac{\lambda_2}{t+1} \iff \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \ \frac{1}{1-t^2} = \frac{\lambda_1(t+1) + \lambda_2(t-1)}{t^2 - 1}$

$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left[ -\ln|t-1| + \ln|t+1| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{1}{2} \left( -\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \right)$

Donc $\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right)}$

4- Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2}(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

On effectue l'intégration par parties : $u(x) = \frac{1}{\cos^n(x)}$ $\quad u'(x) = \frac{n \sin x}{\cos^{n+1}(x)}$

$v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad v(x) = \tan x$

$u_{n+2} = \left[ \frac{\tan x}{\cos^n x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^{n+1}(x)} \tan x \, dx$

$= (\sqrt{2})^n - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2}(x)} dx = (\sqrt{2})^n - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx$

$= (\sqrt{2})^n - n(u_{n+2} - u_n)$

Donc $(n+1) u_{n+2} = (\sqrt{2})^n + n u_n$ et ainsi $\boxed{u_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} u_n.}$

Exercice 2 :

1) Une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto -2\ln(x)$.

Donc les solutions de $y' - \frac{2}{x} y = 0$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2\ln x} = \lambda x^2 \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on calcule $\int^x \frac{\ln t}{t^3} dt$.

On effectue l'intégration par parties : $u(t) = \ln t$ $\quad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^3}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{2t^2}$

$$\int^x \frac{\ln t}{t^3} dt = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]^x + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^3} dt = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]^x$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$ est $\boxed{x \mapsto -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}}$.

3) • Les solutions de $y' - \frac{2}{x}y = 0$ sont $\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^2 \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x}$ de la forme : $y : x \mapsto \lambda(x) x^2$, avec $\lambda$ dérivable.

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x} \iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda'(x)\, x^2 = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$$

Donc $\lambda : x \mapsto \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2}$ convient et $y : x \mapsto \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$ est solution de $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x}$.

• Ainsi les solutions de $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x}$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Problème 1 :

1- Soit $t \in \mathbb{R}$, le discriminant associé à $x^2 - 2x\cos t + 1 = 0$ est $\Delta = 4\cos^2 t - 4 = -4\sin^2 t \leq 0$

Donc : $\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1 \geq 0$

De plus $\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1 = 0 \iff \begin{cases} \Delta = 0 \\ \alpha = \cos t \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t = 0 \\ \alpha = \cos t \end{cases} \iff \begin{cases} t \equiv 0 \ [\pi] \\ \alpha = \pm 1 \end{cases}$

Or $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ donc $\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1 \neq 0$, ainsi $\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1 > 0$

Donc $\boxed{f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

. Comme cos est continue sur $\mathbb{R}$ et ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\boxed{f_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2-a) $J_{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\pi f_{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos t + \frac{1}{\alpha^2}\right) dt = \int_0^\pi \ln\left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1}{\alpha^2}\right) dt$

$= \int_0^\pi \ln(\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1)\,dt - \int_0^\pi \ln(\alpha^2)\,dt = J_\alpha - \pi\ln(\alpha^2)$

Donc $\boxed{J_{\frac{1}{\alpha}} = J_\alpha - 2\pi\ln|\alpha|}$

b) $J_\alpha = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)\,dt$.

On effectue le changement de variable $t = \pi - x$. On a : $dt = -dx$ et

$J_\alpha = \int_\pi^0 \ln(1 - 2\alpha\cos(\pi - x) + \alpha^2)(-dx) = \int_0^\pi \ln(1 + 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)\,dx$

$= \int_0^\pi \ln(1 - 2(-\alpha)\cos x + (-\alpha)^2)\,dx$

Donc $\boxed{J_\alpha = J_{-\alpha}}$

c) On effectue l'intégration par parties : $u(t) = \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)$, $u'(t) = \frac{2\alpha\sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}$

$v'(t) = 1$, $v(t) = t$.

$J_\alpha = \left[t\ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)\right]_0^\pi - 2\alpha\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}\,dt$

$= \pi\ln(1 + 2\alpha + \alpha^2) - 2\alpha I_\alpha$

Donc : $\boxed{J_\alpha = 2\pi\ln|1 + \alpha| - 2\alpha I_\alpha}$

3-a) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} - 1 = 0 \iff z^{2n} = 1 \iff z \in \mathbb{U}_{2n} \iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!], z = e^{\frac{ik\pi}{n}}$

Donc l'équation $z^{2n} - 1 = 0$ admet $2n$ solutions distinctes qui sont :

$$\boxed{\beta_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]}$$

b) $\beta_0 = e^{i0}$ et $\beta_n = e^{i\pi}$ donc $\boxed{\beta_0 = 1 \text{ et } \beta_n = -1.}$

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a : $-(n-1) \leq -k \leq -1$ donc : $n+1 \leq 2n-k \leq 2n-1$

Ainsi $\boxed{2n-k \in [\![n+1, 2n-1]\!]}$.

De plus $\overline{\beta_k} = e^{-\frac{ik\pi}{n}} = e^{2i\pi - i\frac{k\pi}{n}} = e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}}$.

Donc $\boxed{\overline{\beta_k} = \beta_{2n-k}}$

d) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} (z - \beta_k) \underset{j=2n-k}{=} \prod_{j=1}^{n-1} (z - \beta_{2n-j}) = \prod_{j=1}^{n-1} (z - \overline{\beta_j})$$

Donc $\boxed{\prod_{k=n+1}^{2n-1} (z - \beta_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \overline{\beta_k})}$

e) On a : $\alpha^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (\alpha - \beta_k)$ donc :

$$\alpha^{2n} - 1 = (\alpha - \beta_0)\left(\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)\right) \cdot (\alpha - \beta_n) \cdot \left(\prod_{k=n+1}^{2n-1} (\alpha - \beta_k)\right)$$

$$= (\alpha - 1)(\alpha + 1)\left(\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \overline{\beta_k})\right) \text{ d'après 3. b et d.}$$

Or $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ donc :

$$\boxed{\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)(\alpha - \overline{\beta_k})}$$

Or : $$\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)(\alpha - \overline{\beta_k}) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\alpha^2 - (\beta_k + \overline{\beta_k})\alpha + \beta_k \overline{\beta_k}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\alpha^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta_k)\alpha + |\beta_k|^2\right)$$

Donc $$\boxed{\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\alpha^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\alpha + 1\right)}.$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\right)$

Donc $$\boxed{J_\alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}\right)}$$

4-a) Si $\alpha \in ]-1, 1[$, alors $\lim_{n \to +\infty} \alpha^{2n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}\right) = \ln\left(\frac{-1}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}\right)$

et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$, on a : $\boxed{J_\alpha = 0}$

b) si $|\alpha|>1$ alors $\frac{1}{\alpha} \in ]-1,1[$ donc $J_{\frac{1}{\alpha}} = 0$. De plus, d'après 2.a

$$J_\alpha = J_{\frac{1}{\alpha}} + 2\pi \ln|\alpha|.$$

Donc $\boxed{J_\alpha = 2\pi \ln|\alpha|}$

5 - $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin t}{5-4\cos t}\,dt = \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1-2\times 2\cos t + 2^2}\,dt = I_2$

Or $J_2 = 2\pi \ln 3 - 4 I_2$ et $J_2 = 2\pi \ln 2$

Donc $4 I_2 = 2\pi \ln 3 - 2\pi \ln 2$. Ainsi

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{t\sin t\,dt}{5-4\cos t} = I_2 = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

<u>Problème 2 :</u>

1-a) $z_n^n = e^{2i\pi}$ donc $\boxed{z_n^n = 1}$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0}$

b) $|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}\right| = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

Donc $\boxed{|S_n| \leq n}$.

2-a) • $z_2 = e^{i\pi} = -1$

• $S_2 = (-1)^0 + (-1)^1$ donc $\boxed{S_2 = 0 \quad \text{et } |S_2| = 0}$

b) • $z_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

• $S_3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^0 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^1 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{8i\pi}{3}} = 1 + 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$= 1 + 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

donc $\boxed{S_3 = i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad |S_3| = \sqrt{3}}$

c) • $z_4 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

• $S_4 = i^0 + i^1 + i^4 + i^9 = 1 + i + 1 + i$

Donc $\boxed{S_4 = 2(1+i) \quad \text{et } |S_4| = 2\sqrt{2}}$

3-a) $z_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

$S_5 = z_5^0 + z_5^1 + z_5^4 + z_5^9 + z_5^{16}$

$= 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{\frac{18i\pi}{5}} + e^{\frac{32i\pi}{5}}$

$= 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}}$

Donc $S_5 = 1 + 2\left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)$

Ainsi $\boxed{S_5 = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5}}$.

b) On a : $Re\left(\sum_{k=0}^{4} z_5^k\right) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{4} Re\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = 0$

Ainsi $\boxed{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0}$.

c) $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

donc $\boxed{1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0}$.

d) On a donc $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cdot\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) = 0$

Donc $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$

Donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ est solution de : } 4x^2 + 2x - 1 = 0}$.

e) Le discriminant associé à $4x^2 + 2x - 1 = 0$ est $\Delta = 20$, ses racines sont

$\frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Comme $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant 0$ donc $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

f) On a donc $S_5 = 1 + 4\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$

donc $\boxed{S_5 = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad |S_5| = \sqrt{5}}$

4-a). $S_7 = 1 + z_7 + z_7^4 + z_7^9 + z_7^{16} + z_7^{25} + z_7^{36}$. On $z_7^7 = 1$ donc :

$S_7 = 1 + z_7 + z_7^4 + z_7^2 + z_7^2 + z_7^4 + z_7$

D'où $\boxed{S_7 = 1 + 2(z_7 + z_7^2 + z_7^4)}$

. $\overline{S_7} = 1 + 2\left(\overline{z_7} + \overline{z_7}^2 + \overline{z_7}^4\right)$

Or $\overline{z_7} = e^{-\frac{2i\pi}{7}} = e^{i\frac{12\pi}{7}} = z_7^6$ donc :

$\overline{S_7} = 1 + 2\left(z_7^6 + z_7^{12} + z_7^{24}\right)$

Donc $\boxed{\overline{S_7} = 1 + 2\left(z_7^6 + z_7^5 + z_7^3\right)}$

b) $S_7 \cdot \overline{S_7} = \left(1+2(z_7+z_7^2+z_7^4)\right)\left(1+2(z_7^3+z_7^5+z_7^6)\right)$

$= 1+2(z_7+z_7^2+z_7^4+z_7^3+z_7^5+z_7^6)+4(z_7+z_7^2+z_7^4)(z_7^3+z_7^5+z_7^6)$

Or : $\sum_{\ell=0}^{6} z_7^\ell = 0$ donc $\sum_{\ell=1}^{6} z_7^\ell = -1$, ainsi :

$S_7 \cdot \overline{S_7} = 1-2+4(z_7^4+z_7^6+z_7^7+z_7^5+z_7^7+z_7^8+z_7^7+z_7^9+z_7^{10})$

$= -1+4(z_7^4+z_7^6+1+z_7^5+1+z_7+1+z_7^2+z_7^3)$

$= -1+4(2+0)$

Donc $\boxed{S_7 \cdot \overline{S_7} = 7.}$

c) On a : $|S_7|^2 = 7$ donc $\boxed{|S_7| = \sqrt{7}.}$

5-a) $\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell j} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (z_n^j)^\ell$

On a : $z_n^j = 1 \iff e^{\frac{2ij\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2j\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi] \iff j \equiv 0\ [n] \iff n \mid j$

Donc : • si $n \mid j$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell j} = \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = n$

• si $n \nmid j$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell j} = \dfrac{1-(z_n^j)^n}{1-z_n^j} = \dfrac{1-e^{2ij\pi}}{1-z_n^j} = 0$

Donc : $\boxed{\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell j} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

b) $|S_n|^2 = S_n \cdot \overline{S_n} = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell^2}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_n^{-j^2}\right)$

Donc $\boxed{|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{\ell^2-j^2}.}$

c) i) $\sum_{k=\ell+1}^{\ell+n} z_n^{-2kj+k^2} - \sum_{k=\ell}^{\ell+n-1} z_n^{-2kj+k^2}$

$= \left(\cancel{\sum_{k=\ell+1}^{\ell+n-1} z_n^{-2kj+k^2}} + z_n^{-2(\ell+n)j+(\ell+n)^2}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=\ell+1}^{\ell+n-1} z_n^{-2kj+k^2}} + z_n^{-2\ell j+\ell^2}\right)$

$= z_n^{-2\ell j+\ell^2} \cdot z_n^{-2nj+2n\ell+n^2} - z_n^{-2\ell j+\ell^2}$

$= z_n^{-2\ell j+\ell^2}\left((z_n^n)^{-2j+2\ell+n} - 1\right) = z_n^{-2\ell j+\ell^2}(1-1)$

Donc : $\boxed{\sum_{k=\ell+1}^{\ell+n} z_n^{-2kj+k^2} - \sum_{k=\ell}^{\ell+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = 0}$

ii) Posons : $\forall l \in \mathbb{Z},\ u_l = \sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2}$.

D'après la question précédente : $\forall l \in \mathbb{Z},\ u_{l+1} = u_l$.

Donc $(u_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ est constante.

Ainsi : $\forall l \in \mathbb{Z} \quad u_l = u_0$.

Donc : $\boxed{\forall l \in \mathbb{Z} \quad \sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}}$

d) $|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} z_n^{l^2-j^2} \underset{k=l+j}{=} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{j+n-1} z_n^{(k-j)^2-j^2}$

$= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{j+n-1} z_n^{k^2-2kj}$

Donc $\boxed{|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}}$ d'après ii pour $l=j$.

e) $|S_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{k^2} \sum_{j=0}^{n-1} z_n^{-2kj}$

Or, d'après 5.a) $\sum_{j=0}^{n-1} z_n^{-2kj} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid -2k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De plus $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $2k \in [\![0, 2n-2]\!]$, ainsi $n \mid -2k \iff k=0$ ou $-2k=n$

Or $n$ est impair donc $n \mid -2k \iff k=0$

Donc $|S_n|^2 = z_n^{0^2}\cdot n = n$.

Ainsi $\boxed{|S_n| = \sqrt{n}}$

f) De même $|S_n|^2 = z_n^{0^2}\cdot n + z_n^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\cdot n = n\left(1 + e^{\frac{2i\pi}{n}\cdot\frac{n^2}{4}}\right) = n\left(1 + e^{i\pi\frac{n}{2}}\right)$

$= n\left(1 + (-1)^{\frac{n}{2}}\right)$

Donc $\boxed{|S_n| = \sqrt{n}\cdot\sqrt{1+(-1)^{\frac{n}{2}}} = \begin{cases} \sqrt{2n} & \text{si } \frac{n}{2} \text{ pair} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ impair.} \end{cases}}$