CORRECTION DM5

Problème 1 :

1-a) L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$. Ses racines sont $r=\pm i$. Donc l'ensemble des solutions de $y''+y=0$ est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} [0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x+\mu\sin x \end{array}, \ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \right\}}$$

b) Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{rcl}[0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x+\mu\sin x\end{array}$.

On a : $y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0 \iff \begin{cases}\lambda\cos 0+\mu\sin 0=0 \\ \lambda\cos\frac{\pi}{2}+\mu\sin\frac{\pi}{2}=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\end{cases}$

Donc l'unique solution telle que $y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0$ est : $\boxed{y=0}$

2-a) Soit $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

- $F(x)=-\cos x\int_0^x \sin t\,dt-\sin x\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=-\cos x\,[-\cos t]_0^x-\sin x\,[\sin t]_x^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\cos x(-\cos x+1)-\sin x(1-\sin x) = \cos^2 x-\cos x-\sin x+\sin^2 x$

Donc $\boxed{F(x)=1-\cos x-\sin x.}$

- F est dérivable et $F'(x)=\sin x-\cos x$
- F est deux fois dérivable et $F''(x)=\cos x+\sin x$.

Donc $\boxed{F''(x)+F(x)=1}$

b) • F est solution de $y''+y=1$ donc les solutions de $y''+y=1$ sont :

$\begin{array}{rcl}[0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x+\mu\sin x+F(x)=1+(\lambda-1)\cos x+(\mu-1)\sin x\end{array}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

• Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{rcl}[0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+(\lambda-1)\cos x+(\mu-1)\sin x\end{array}$. On a :

$y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0 \iff \begin{cases}1+\lambda-1=0\\ 1+\mu-1=0\end{cases} \iff \lambda=\mu=0$

Donc l'unique solution de $y''+y=1$ telle que $y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0$ est :

$\boxed{y=F.}$

3-a) Soit $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

- $F(x)=-\cos x\int_0^x t\sin t\,dt-\sin x\int_x^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$

Par intégrations par parties :

$F(x)=-\cos x\left([-t\cos t]_0^x-\int_0^x -\cos t\,dt\right)-\sin x\left([t\sin t]_x^{\frac{\pi}{2}}-\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right)$

$=-\cos x\left(-x\cos x+[\sin t]_0^x\right)-\sin x\left(\frac{\pi}{2}-x\sin x-[-\cos t]_x^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$=x\cos^2 x-\cos x\sin x-\frac{\pi}{2}\sin x+x\sin^2 x+\sin x\cos x$

Donc $\boxed{F(x) = x - \frac{\pi}{2}\sin x}$

- F est dérivable et $F'(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos x$.
- F est deux fois dérivable et $F''(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$.

Donc $\boxed{F''(x) + F(x) = x.}$

b) • F est solution de $y'' + y = x$ donc les solutions de $y'' + y = x$ sont :

$$\begin{array}{l} [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + F(x) = \lambda\cos x + (\mu - \frac{\pi}{2})\sin x + x \end{array}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

• Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $y : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda\cos x + (\mu - \frac{\pi}{2})\sin x + x$. On a :

$$y(0) = y(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

Donc l'unique solution de $y'' + y = x$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ est :

$$\boxed{y = F.}$$

4-a) • Soit $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $F(x) = -\cos x \int_0^x f(t)\sin t\,dt + \sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos t\,dt$

Or $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin t\,dt$ est une primitive de $x \mapsto f(x)\sin x$

et $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos t\,dt$ est une primitive de $x \mapsto f(x)\cos x$

Donc F est dérivable et :

$$F'(x) = \sin x \int_0^x f(t)\sin t\,dt - \cancel{\cos x f(x)\sin x} + \cos x \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos t\,dt + \cancel{\sin x f(x)\cos x}$$

$$= \sin x \int_0^x f(t)\sin t\,dt + \cos x \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos t\,dt.$$

• Ainsi F' est dérivable et

$$F''(x) = \cos x \int_0^x f(t)\sin t\,dt + \sin x f(x)\sin x - \sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos t\,dt + \cos x f(x)\cos x$$

$$= f(x) - F(x).$$

Donc : $\boxed{F''(x) + F(x) = f(x)}$

b) • F est solution de $y'' + y = f$ donc les solutions de $y'' + y = f$ sont :

$$\begin{array}{l} [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + F(x) \end{array}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

• Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $y : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + F(x)$

$$y(0)=y(\tfrac{\pi}{2})=0 \iff \begin{cases}\lambda+F(0)=0\\ \mu+F(\tfrac{\pi}{2})=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\end{cases}.$$

Donc l'unique solution de $y''+y=f$ telle que $y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0$ est :

$$\boxed{y=F.}$$

5-a) Soient $f_1, f_2 \in E$. Supposons que $T(f_1)=T(f_2)$.

Posons $F_1=T(f_1)$ et $F_2=T(f_2)$. On a : $F_1''+F_1=f_1$ et $F_2''+F_2=f_2$.

Or $F_1=F_2$ donc $F_1''=F_2''$ ainsi $F_1''+F_1=F_2''+F_2$, d'où $f_1=f_2$.

Donc : $\boxed{T \text{ est injectif.}}$

b) Supposons T surjectif. Posons $g=1$. Alors $g\in E$ donc il existe $f\in E$ tel que $g=T(f)$.

Ainsi $g(0)=T(f)(0)$ donc $1=0$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{T \text{ n'est pas surjectif.}}$

6-a) • Supposons $\lambda=0$, alors $T(f)=0=T(0)$. Or T est injectif donc $f=0$ ce qui est absurde. Donc : $\boxed{\lambda\neq 0.}$

• $T(f)$ est solution de $y''+y=f$ donc λf est solution de $y''+y=f$. Ainsi :

$$\lambda f''+\lambda f=f.$$

D'où : $\boxed{\forall x\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\quad f''(x)+\left(1-\tfrac{1}{\lambda}\right)f(x)=0}.$

• $f(0)=\frac{1}{\lambda}T(f)(0)=\frac{1}{\lambda}F(0)=0$ et $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\lambda}T(f)(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\lambda}F(\frac{\pi}{2})=0$

Donc $\boxed{f(0)=f(\tfrac{\pi}{2})=0}$

b) On a : $(R) : \begin{cases}f''=0\\ f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0\end{cases} \iff \begin{cases}\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ f'(x)=\lambda\\ f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\ f(x)=\lambda x+\mu\\ \mu=0 \text{ et } \lambda\tfrac{\pi}{2}+\mu=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\ f(x)=\lambda x+\mu\\ \mu=0 \text{ et } \lambda=0\end{cases}$$

$$\iff f=0$$

Donc l'unique fonction vérifiant (R) est : $\boxed{f=0.}$

c) $(R) : \begin{cases} f'' - \omega^2 f = 0 \\ f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ et l'équation caractéristique associée est : $r^2 - \omega^2 = 0$ qui a pour racine $\pm\omega$. ④

Donc $(R) \iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x} \\ \lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda e^{\omega \frac{\pi}{2}} + \mu e^{-\omega \frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x} \\ \mu = -\lambda, \quad \lambda (e^{\omega \frac{\pi}{2}} - e^{-\omega \frac{\pi}{2}}) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x} \\ \mu = -\lambda, \quad \lambda = 0 \end{cases}$ car $\omega \neq 0$ donc $e^{\omega \frac{\pi}{2}} \neq e^{-\omega \frac{\pi}{2}}$.

$\iff f = 0$.

Donc l'unique fonction vérifiant (R) est : $\boxed{f = 0}$

d) • $(R) : \begin{cases} f'' + \omega^2 f = 0 \\ f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ et l'équation caractéristique associée est : $r^2 + \omega^2 = 0$ qui a pour racines $\pm i\omega$.

Donc $(R) \iff \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \\ \lambda = 0, \quad \lambda \cos(\omega \frac{\pi}{2}) + \mu \sin(\omega \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

$\iff \exists \mu \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \mu \sin(\omega x)$ et $\mu \sin(\omega \frac{\pi}{2}) = 0$.

$\iff \begin{cases} f = 0 & \text{si } \sin(\omega \frac{\pi}{2}) \neq 0 \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ f(x) = \mu \sin(\omega x) & \text{si } \sin(\omega \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$.

Ainsi, s'il existe une fonction non nulle vérifiant (R) alors $\sin(\omega \frac{\pi}{2}) = 0$.

Or $\sin(\omega \frac{\pi}{2}) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \omega \frac{\pi}{2} = n\pi$ (car $\omega > 0$)

$\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \omega = 2n$.

Donc s'il existe une fonction non nulle f vérifiant (R), on a :

$$\boxed{\omega = 2n, \ n \in \mathbb{N}^*.}$$

• On a alors : $1 - \frac{1}{\lambda} = 4n^2$ d'où $\frac{1}{\lambda} = 1 - 4n^2$

Donc : $\boxed{\lambda = -\frac{1}{4n^2 - 1}}$

Problème 2 :

1-a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$

Donc $\boxed{f = B}$.

b) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap A) \cup E = E$.

Donc $\boxed{f = E}$

2- $f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = \emptyset \cup B = B$, $f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B$

$f(B) = (B \cap A) \cup B = B$ car $B \cap A \subset B$, $f(E) = (E \cap A) \cup B = A \cup B$

Donc $\boxed{f(\emptyset) = B,\ f(A) = A \cup B,\ f(B) = B,\ f(E) = A \cup B}$

3-a) On a : $A \subset A \cup B$ donc $(A \cup B) \cap A = A$

et $A \cap B \subset B$ donc $(A \cap B) \cup B = B$

b) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$,

$f \circ f(X) = f((X \cap A) \cup B) = (((X \cap A) \cup B) \cap A) \cup B$

$= (((X \cap A) \cap A) \cup (B \cap A)) \cup B$

$= (X \cap A) \cup (B \cap A) \cup B = (X \cap A) \cup B = f(X)$.

Donc $\boxed{f \circ f = f}$

4-a) . (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons g injective.

Soit $y \in F$. On a : $g \circ g(y) = g(y)$. Or g injective donc $g(y) = y$.

Pour $x = y \in F$. On a $g(x) = y$. Donc g est surjective.

. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons g surjective.

Soit $y \in F$, il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Ainsi $g(y) = g \circ g(x) = g(x) = y$

Donc $g = Id_F$.

. (iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $g = Id_F$, alors g est bijective donc injective.

Ainsi : $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)}$.

b) D'après 4.a, comme $f \circ f = f$, f est bijective ssi $f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

. Supposons $f = Id_{\mathcal{P}(E)}$. Alors $f(\emptyset) = \emptyset$ donc $B = \emptyset$

et $f(E) = E$ donc $A \cup B = E$ ainsi $A \cup \emptyset = E$, d'où $A = E$.

- Prenons $A = E$ et $B = \emptyset$.
  Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X \cup \emptyset = X$ donc $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective ssi } A = E \text{ et } B = \emptyset.}$