PCSI 1 — 2024/2025

Programme de colles

Semaine 29 du 2 juin au 6 juin

Cours :

- **Chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois**
  - I Univers, événements, variables aléatoires
  - II Espaces probabilisés finis
  - III Probabilités conditionnelles
  - IV Loi d'une variable aléatoire
  - V Evénements indépendants
- **Chapitre 23 : Espérance et variance**
  - I Espérance
  - II Variance, écart type, covariance
  - III Inégalités probabilistes
- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une matrice carrée
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Formule des probabilités composées et formule des probabilités totales *(ch 22, propositions 5 et 6)*

T_1 : *Ch 22, exemple 8*
Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

T_2 : *Ch 22, exemple 13*
n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?
On présentera deux méthodes.

T_3 : *Ch 23, exemple 8*
A un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1 (resp. X_2, X_3) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

(a) Déterminer la loi de X_1.
(b) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
(c) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

T_4 : *Ch 24, exemple 8*
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

PCSI 1

Programme de colles

Semaine 29 du 2 juin au 6 juin

2024/2025

Cours :

- **Chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois**
  - I Univers, événements, variables aléatoires
  - II Espaces probabilisés finis
  - III Probabilités conditionnelles
  - IV Loi d'une variable aléatoire
  - V Evénements indépendants
- **Chapitre 23 : Espérance et variance**
  - I Espérance
  - II Variance, écart type, covariance
  - III Inégalités probabilistes
- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une matrice carrée
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Formule des probabilités composées et formule des probabilités totales *(ch 22, propositions 5 et 6)*

T_1 : *Ch 22, exemple 8*
Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

T_2 : *Ch 22, exemple 13*
n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?
On présentera deux méthodes.

T_3 : *Ch 23, exemple 8*
A un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1 (resp. X_2, X_3) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

(a) Déterminer la loi de X_1.
(b) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
(c) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

T_4 : *Ch 24, exemple 8*
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.