

## I Equations différentielles linéaire du premier ordre

### Exercice 1:

Appliquer la formule du cours.

1. *Solution* :  $x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}$
2. *Solution* :  $x \mapsto \lambda e^{-1/x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$

### Exercice 2:

Chercher une solution particulière de la forme  $x \mapsto A \cos x + B \sin x$ .

*Solution* :  $y(x) = -\frac{2}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} \sin(x) + \lambda \exp\left(\frac{x}{2}\right)$

### Exercice 3:

1. *Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \exp(x^2) + \operatorname{ch} x, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$
2. *Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \exp(\cos x) + 2 \cos x + 2, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

### Exercice 4:

1. Commencer par réfléchir au degré du polynôme recherché.  
*Solution* :  $x \mapsto x - 2$
2. *Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x+1)e^{-x} + x - 2, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$
3. *Solution* :  $x \mapsto (x+1)e^{1-x} + x - 2$

### Exercice 5: (★★)

Analyse : Supposons qu'il existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1$ .

Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)f(-x)$ . Alors, on montre que  $g' = 0$ , donc, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = \lambda$ , ainsi, on montre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ .

En résolvant cette équation différentielle, on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mu e^{\frac{1}{\lambda}x}, \mu \in \mathbb{R}$ .

Synthèse : Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mu e^{\frac{1}{\lambda}x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(x) = \dots$ . Donc  $f$  est solution ssi  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu^2}$ .

Conclure.

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \exp \frac{x}{\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}^* \end{array} \right\}$

### Exercice 6: (★)

Résoudre la première équation différentielle et injecter les solutions dans la seconde.

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x-1)e^x, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

### Exercice 7: (★★★)

Raisonnement par analyse-synthèse. Commencer par prouver que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en calculant les limites des taux d'accroissements. Le calcul de la dérivée conduit à une équation différentielle.

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x e^x, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

### Exercice 8:

Résoudre  $y' + y = 2e^x$  et  $y' + y = 4 \sin x + 3 \cos x$  et appliquer le principe de superposition.

*Solution* :  $x \mapsto \lambda e^{-x} + e^x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{7}{2} \sin x, x \in \mathbb{R}$

### Exercice 9: (★)

1. Utiliser le principe de superposition et déterminer de quelle forme il faut chercher les solutions particulières.

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{6}{5} \cos 2t + \frac{3}{5} \sin 2t, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Trouver une solution évidente.

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \exp(-\operatorname{Arctan} t) + \operatorname{Arctan} t - 1, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

### Exercice 10:

- a. Utiliser la méthode de variation de la constante.

*Solution* :  $y(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \lambda e^{-2x}$

- b. Utiliser la méthode de variation de la constante.

*Solution* :  $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right)e^x$

### Exercice 11:

Utiliser la méthode de variation de la constante.

1. *Solution* :  $x \mapsto \frac{x^2}{2} e^{x^2/2} + \lambda e^{x^2/2}, \lambda \in \mathbb{R}$

2. *Solution* :  $x \mapsto \frac{-\lambda+x}{x(x-1)}, \lambda \in \mathbb{R}$

3. *Solution* :  $x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$

**Exercice 12 :** (★) ✨

a. Utiliser la méthode de variation de la constante.

*Solution* :  $y(x) = \lambda(x-1) + (x-1) \ln \frac{x}{x-1}$

b. Utiliser la méthode de variation de la constante.

*Solution* :  $y(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^x)$

**Exercice 13 :** (★★) ✨

Utiliser la méthode de variation de la constante.

*Solution* :  $y(x) = \frac{1}{x} + \lambda \ln x$

## II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

**Exercice 14 :** 

Appliquer les théorèmes du cours.

1. *Solution* :  $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. *Solution* :  $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3. *Solution* :  $x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{3}x) e^{-x} + \mu \sin(\sqrt{3}x) e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4. *Solution* :  $x \mapsto \lambda e^{(-1-i\sqrt{3})x} + \mu e^{(-1+i\sqrt{3})x}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

5. *Solution* :  $x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

**Exercice 15 :** (★★)

Faire différents cas selon le signe du discriminant associé à l'équation caractéristique. Remarquer que les solutions sont bornées ssi leur limite en  $+\infty$  est finie.

*Solution* :  $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$

**Exercice 16 :** (★★)

Poser  $z(t) = y(\sin t)$  et montrer que  $z'' + z = 0$ .

*Solution* :  $y(x) = Ax + B\sqrt{1-x^2}$ .

**Exercice 17 :** (★★)

Montrer que  $z'' - z = 0$ .

*Solution* :  $y(x) = Ae^{x-x^2/2} + Be^{-x-x^2/2}$ .

**Exercice 18 :** (★★) ✨ Poser  $z(t) = y(\tan t)$  et montrer que  $z'' + m^2 z = 0$ .

*Solution* :  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cos(m \operatorname{Arctan} x) + \mu \sin(m \operatorname{Arctan} x), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$  et pour  $m = 2$  :

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \frac{1-x^2}{1+x^2} + 2\mu \frac{x}{1+x^2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

**Exercice 19 :** (★★) ✨

Montrer que  $z'' + 2z' + z = 0$ .

*Solution* :  $y(x) = Ae^{-x} + B \frac{e^{-x}}{x}$ .

**Exercice 20 :** (★)  ✨

Analyse : Supposons qu'il existe  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$ .

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0$ .

Résoudre l'équation  $y'' + y = 0$ .

Ainsi, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ .

Synthèse : Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$  ssi  $\lambda = \mu$ .

Conclure. *Solution* :  $\{x \mapsto \lambda(\sin x + \cos x), \lambda \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 21 :** (★★)

Raisonner par analyse-synthèse et calculer  $f''$  pour obtenir une équation différentielle d'ordre 2.

*Solution* : Si  $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \sin x, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Si  $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\alpha}{2}\right), \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

**Exercice 22 :** 

Cherche une solution particulière de la forme vue en cours.

1. *Solution* :  $x \mapsto e^x + (\lambda x + \mu) e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. *Solution* :  $x \mapsto \frac{x^2}{2} e^{2x} + (\lambda x + \mu) e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3. *Solution* :  $x \mapsto -\frac{1}{32} \cos(3x) + \lambda \cos x + \mu \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4. *Solution* :  $x \mapsto \frac{3x}{8} \sin x + \lambda \cos x + \mu \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**Exercice 23 :** (★★) ✨

Montrer que  $z'' - z = 1$ .

*Solution* :  $y(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}$ .

**Exercice 24: (★★)** ✨

Poser  $z(t) = y(e^t)$  et montrer que  $z'' + 2z' + z = (e^t + 1)^2$  et utiliser le principe de superposition.

$$\text{Solution : } y(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\lambda \ln x + \mu}{x}.$$

**Exercice 25:** 📖

Linéariser le second membre.

$$\text{Solution : } x \mapsto -\frac{1}{32} \cos(3x) + \frac{3x}{8} \sin x + \lambda \cos x + \mu \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Exercice 26: (★)** ✨

Ecrire le sinus hyperbolique avec des exponentielles et utiliser le principe de superposition.

$$\text{Solution : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x + \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

**Exercice 27: (★★)**

Faire différents cas selon le signe du discriminant et les racines du polynôme caractéristique.

*Solution :*

Si  $\lambda < 1$  et  $\lambda \neq 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + \frac{e^{2x}}{\lambda} + \frac{\sin x}{\lambda-2} e^x, A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Si } \lambda = 0, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{2x} + B + \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{\sin x}{2}e^x, A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Si } \lambda = 1, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^x + e^{2x} - \sin x e^x, A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Si  $\lambda > 1$  et  $\lambda \neq 2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left( A \cos(\sqrt{\lambda-1}x) + B \sin(\sqrt{\lambda-1}x) \right) e^x + \frac{e^{2x}}{\lambda} + \frac{\sin x}{\lambda-2} e^x, A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Si } \lambda = 2, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (A \cos(x) + B \sin(x)) e^x + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} x \cos x e^x, A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$