

I Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 :

Solution : $\operatorname{Re}(z_1) = 22$, $\operatorname{Im}(z_1) = 19$, $\operatorname{Re}(z_2) = -2$, $\operatorname{Im}(z_2) = 3$.

Exercice 2 :

Solution : $\bar{z}_1 = -i(4+2i)^2$, $\bar{z}_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{1-6i}$, $\bar{z}_3 = \frac{\bar{z}(1+iz)}{2\bar{z}+4iz}$.

Exercice 3 :

Multiplier le numérateur et le dénominateur par \bar{z} .

Solution : $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.

Exercice 4 : (★)

Calculer la partie réelle de $z + \frac{1}{z}$ en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z .

Exercice 5 :

Solution : On pose $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, alors $\operatorname{Re}(Z) = \frac{2-x-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = -\frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$.

Exercice 6 : (★)

Ecrire z sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution : $\left\{3 - \frac{4i}{8}\right\}$

II Module

Exercice 7 : (★)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| \geq 1$, on a $|z|^2 \geq |z|$ et conclure.
- Si $|z| < 1$. Remarquer que $|z| = |z - z^2 + z^2|$ et utiliser l'inégalité triangulaire pour montrer que : $|z| \leq |z||z-1| + |z|^2$ et conclure.

Exercice 8 : (★★)

Faire une preuve par récurrence.

Exercice 9 : (★★★)

Faire une récurrence. Pour l'initialisation ($n = 2$), utiliser, pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Exercice 10 :

Solution : $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$, $\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$.

Exercice 11 : (★)

Utiliser la factorisation par l'angle moitié.

Solution : $\operatorname{Re}(z) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Exercice 12 : (★★)

Remarquer que $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = 0$ pour en déduire que $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré : $16x^2 - 20x + 5 = 0$.

Solution : $\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 13 : (★)

Simplifier les expressions faisant apparaître t en utilisant les formules de trigonométrie.

Exercice 14 : (★)

Solution : $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

Exercice 15 : (★★)

1. Remarquer que $\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ik\pi/3}\right)$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.

Solution : $\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}2^n}$.

2. Remarquer que $\sin(kx) = \text{Im}(e^{ikx})$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.

$$\text{Solution : } \frac{\cos x - (\cos x)^{n+1} \cos(nx)}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \text{ mod } \pi, \quad 0 \text{ si } x \equiv 0 \text{ mod } \pi.$$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

Exercice 16:

1. Remarquer que $2013 = 167 * 12 + 9$.

$$\text{Solution : } -i2^{2013}$$

2. Solution : -4

3. Solution : $2^n \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^n \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right)$.

4. Solution : $\frac{31 - 8i}{25}$.

Exercice 17:

$$\text{Solution : } z_1 = e^{i(a+\pi/2)}, z_2 = e^{i(-a+\pi/2)}, z_3 = e^{i(a+\pi)}.$$

Exercice 18:

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

$$\text{Solution : } z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}}$$

2. Identifier les parties réelle et imaginaire.

$$\text{Solution : } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 19:

$$\text{Solution : } 2^{10} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 20:

$$\text{Solution : } |z_1| = 2\sqrt{2}, \text{ Arg}(z_1) = -\frac{7\pi}{12}, |z_2| = 4\sqrt{2}, \text{ Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{4}, |z_3| = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}, \text{ Arg}(z_3) = -\frac{\pi}{6}, |z_4| = 4\sqrt{3}, \text{ Arg}(z_4) = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 21: (★)

Utiliser la forme trigonométrique de $1+i$ et de $1-i$ et la factorisation par l'angle moitié.

$$\text{Solution : } z = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}} e^{3i\pi/4}$$

Exercice 22:

Si $z \neq 0$, écrire z sous forme trigonométrique.

$$\text{Solution : } \{0, 1, -1, i, -i\}$$

Exercice 23: (★)

Se ramener à une condition pour qu'une exponentielle soit réelle.

$$\text{Solution : } \sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} e^{i\pi/6} \text{ et } (\sqrt{6} + i\sqrt{2})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \in 6\mathbb{N}.$$

Exercice 24: (★★)

Utiliser la factorisation par l'angle moitié pour aboutir à une disjonction de cas en fonction du signe de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{Solution : si } \theta \in]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[, k \in \mathbb{Z}, |z| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg(z) \equiv \frac{3\theta}{2} [2\pi],$$

$$\text{si } \theta \in]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[, k \in \mathbb{Z}, |z| = -2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg(z) \equiv \pi + \frac{3\theta}{2} [2\pi],$$

$$\text{si } \theta \equiv \pi [2\pi], \text{ alors } z = 0.$$

Exercice 25: (★★)

$$\text{Remarquer que : } \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} = \text{Re}((1+i)^{4n}) \text{ et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} = \text{Im}((1+i)^{4n}).$$

$$\text{Solution : } \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} = (-1)^n 2^{2n}$$

$$\text{et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} = 0.$$

V Équations algébriques

Exercice 26: (★★)

Linéariser \cos^3 et \sin^3 puis utiliser la même méthode que dans l'exercice 22.

$$\text{Solution : } (\cos^3)^{(n)} : x \mapsto \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{et } (\sin^3)^{(n)} : x \mapsto -\frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 27:

Calculer les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique et trigonométrique.

$$\text{Solution : les racines carrées de } 1+i \text{ sont } \pm 2^{1/4} e^{i\pi/8} = \pm \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \text{ et}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Exercice 28:

Utiliser un système constitué d'une équation sur la partie réelle, d'une équation sur la partie imaginaire et une équation sur le module au carré.

$$\text{Solution : } \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{37}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}} \right)$$

Exercice 29: 

1. *Solution* : $1 + 3i$ et $3 - i$
2. *Solution* : $-1 - i$ et $-3 - 2i$

Exercice 30: 

Se ramener à une équation du second ordre.

Solution : $\pm \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8}, \pm i$.

Exercice 31 : (★) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines carrées d'un complexe.

Solution : $1 + i, -1 - i, 1 + 2i, -1 - 2i$.

Exercice 32 : (★)  

Soit $z \in i\mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$ tels que : $z = iy$. Montrer que :

$$z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 6y - 20 = 0 \\ -y^3 + 4y = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = 0$ ou $y = 2$ ou $y = -2$ et en réinjectant dans la première équation, seul $y = 2$ convient. Ainsi $z_0 = 2i$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = (z - 2i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow a = 1, b = -2 + 2i, c = -10i. \end{aligned}$$

Après calcul, les racines de $z^2 + (-2 + 2i)z - 10i = 0$ sont $z_1 = 3 + i, z_2 = -1 - 3i$.

Solution : $z_0 = 2i, z_1 = 3 + i, z_2 = -1 - 3i$.

Exercice 33 : (★★)

Utiliser les racines complexes de l'équation caractéristique et les propriétés des nombres complexes pour se ramener à une expression réelle.

$$\text{Solution : } u_n = \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^n}$$

VI Racines n -ièmes

Exercice 34 : (★) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines cubiques d'un complexe.

$$\text{Solution : } 2^{1/6} e^{-i\pi/12}, 2^{1/6} e^{i7\pi/12}, 2^{1/6} e^{i15\pi/12}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, i.$$

Exercice 35 : (★★)

Ramener l'équation à $\left(\frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1}\right)^4 = 1$ et utiliser les racines quatrièmes de l'unité ou se ramener à deux équations de degré 2.

$$\text{Solution : } \frac{-\sqrt{2}i-1}{1+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}i-1}{1-\sqrt{2}}, \frac{(1+\sqrt{2})(-1-i\sqrt{2})}{3}, \frac{(1-\sqrt{2})(-1+i\sqrt{2})}{3}.$$

Exercice 36 : (★) 

1. *Solution* : $u + v = -1, u^2 = -2 - u$.
2. Remarquer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \text{Im}(u)$ puis que u est racine du polynôme $X^2 + X + 2$ et enfin, déterminer le signe de cette quantité.

$$\text{Solution : } \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 37 : 

Solution : $\{\sqrt[6]{2} e^{i(\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3})}, k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$.

Exercice 38 : (★★)

1. Utiliser les racines quatrièmes de l'unité.
Solution : $0, -\frac{3}{5} + \frac{i}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$
2. Si les points appartiennent à un même cercle, le centre appartient aux médiatrices de tous les segments formés à partir de deux points.
En utilisant les points d'affixe $-\frac{3}{5} + \frac{i}{5}$ et $-\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$ puis 0 et $-\frac{2}{3}$, déterminer les coordonnées du centre. Puis calculer 4 modules pour prouver que les points sont bien sur un même cercle.

Solution : Centre $(-\frac{1}{3}, 0)$ et rayon $\frac{1}{3}$.

Exercice 39 : (★★) 

Montrer que $z = -(a+i)^4$.

$$\text{Solution : } \pm \frac{(a-1) + i(1+a)}{\sqrt{2}}, \pm i \frac{(a-1) + i(1+a)}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 40 : (★★) 

Etablir le lien entre la quantité à calculer et $\sum_{k=0}^{10} \cos \frac{(2k+1)\pi}{11}$.

VII Exponentielle complexe

Exercice 41 : 

1. *Solution* : $\left\{\frac{i\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. *Solution* : $\{\ln 2 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. *Solution* : $\{\ln 2 + \frac{i\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. *Solution* : $\{\frac{\ln 2}{2} + \frac{i\pi}{6} + ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 42 : (★)

Se ramener à une équation du second degré en e^z .

Solution : $\{i\frac{2\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i\frac{4\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Exercice 43 : (★★)

Remarquer que $f(x) = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$ et que la dérivée n -ième de $x \mapsto e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto (1+i)^n e^{(1+i)x}$ et calculer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$.

Solution : $x \mapsto (\sqrt{2})^n \cos(x + n\frac{\pi}{4})e^x$.

IX Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 44 : (★)

Utiliser le quotient $\frac{z^4 - z^2}{z - z^2}$.

Solution : $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{Im} z = 0$.

Exercice 45 : (★★)

Utiliser le quotient $\frac{z+i}{\frac{1}{z}+i}$.

Solution : $\operatorname{Re} z = 0$ ou $|z-i| = \sqrt{2}$.

Exercice 46 : (★)

1. *Solution* : $|a| = 2, \operatorname{Arg}(a) = -\frac{\pi}{6}$.

2. *Solution* : $f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

3. *Solution* : $b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4. *Solution* : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.