PCSI 1 — 2024/2025

Indications du chapitre 4 : Trigonométrie

I Cercle trigonométrique

Exercice 1 : (⋆)
Utiliser les formules $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.
Solution : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 2 : (⋆)
Remarquer que $\cos x+\sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 3 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence.

II Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 4 :
Se ramener à un produit nul.
Solution : $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 5 : (⋆)
Poser $X=\cos(2x)$ et se ramener à un polynôme du second degré.
Solution : $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 6 : (⋆)
Transformer le sinus en cosinus.
Solution : $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 7 : (⋆⋆)
Se ramener à un produit nul.
Solution : $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 8 :
1. *Solution :* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$
2. *Solution :* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

III Fonctions cosinus et sinus

Exercice 9 :
Solution : $f'(x)=-6\cos(x)\sin^2(x)$, f *est croissante sur* $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ *et sur* $[\frac{\pi}{2},\pi]$ *et décroissante sur* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 10 : (⋆) Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré.
Solution : $f'(x)4\cos^2(x)+2\cos(x)-2$, f *est* 2π*-périodique, impaire, croissante sur* $[0,\frac{\pi}{3}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{3},\pi]$.

Exercice 11 : (⋆⋆) *Solution :* $f'(x)=2\sin x\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, f *est croissante sur* $[0,\frac{3\pi}{4}]$ *et décroissante sur* $[\frac{3\pi}{4},\pi]$.

Exercice 12 : (⋆⋆)
1. *Solution :* $g_n(x)=\cos(x)-nx\sin(x)$.
2. *Solution :* g_n *est décroissante.*
3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que g_n s'annule.

IV Tangente

Exercice 13 : (⋆)
1. *Solution :* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$
2. *Solution :* f *est* π*-périodique.*
3. Utiliser $f(0)$ pour montrer que f n'est pas impaire. Raisonner par l'absurde pour montrer que f n'est pas paire en utilisant, par exemple, les valeurs en $\pm\frac{\pi}{6}$.
   Solution : f *n'est ni paire ni impaire.*
4. Utiliser les formules de trigonométrie.
5. *Solution :* f *est strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ *et sur* $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$.

Exercice 14 : (⋆⋆)
1. *Solution :* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
2. *Solution :* f *est* π*-périodique.*
3. *Solution :* f *est impaire.*

4. Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré en $\cos^2 x$.
Solution : $f'(x) = \dfrac{4\cos^4 x - 2\cos^2 x - \frac{3}{4}}{\cos^2 x}$, *$f$ est strictement croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$ *et strictement décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 15 : (⋆⋆⋆) *Solution :* $f'(x) = \frac{\tan(x)(4+\cos x+\cos^2 x)\sqrt{1-\cos x}}{2\cos^2 x}$, *$f$ est croissante sur* $[0, \frac{\pi}{2}[$ *et décroissante sur* $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Exercice 16 : (⋆)
Dériver deux fois $x \mapsto \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 17 : (⋆)
Pour étudier le signe de f', utiliser la croissance de sh.
Solution : f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 18 : (⋆⋆)

1. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x.
Solution : $\ln(2+\sqrt{5})$.
2. Utiliser la question précédente et la monotonie de sh.
Solution : $]-\infty, \ln(2+\sqrt{5})]$.
3. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x.
Solution : $\ln(2+\sqrt{3}), \ln(2-\sqrt{3})$.
4. Utiliser la question précédente et la monotonie de ch.
Solution : $[\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$.

Exercice 19 :
Utiliser la définition avec les exponentielle.

Exercice 20 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que f est continue, strictement monotone donc bijective de ...vers ....
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) = \frac{\exp\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)+\exp\left(-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)}{2}$.
   Ainsi $f(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} = \cdots = x$.
   Conclure.
2. (a) Montrer que sh est continue, strictement monotone donc bijective de ...vers ....
   (b) De même, calculer $\operatorname{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$.

VI Fonctions circulaires réciproques

Exercice 21 : (⋆)
Etudier $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{Arctan}|x|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

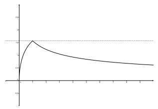
Exercice 22 : (⋆⋆)
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
Solution :$]-1, 1]$

Exercice 23 : (⋆⋆)
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
Solution :$\mathbb{R}$

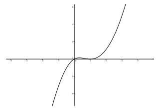
Exercice 24 : (⋆⋆)
Dériver $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ et utiliser la continuité et la valeur en 0 pour déterminer les constantes.

Exercice 25 : (⋆)

1. *Solution :*



2. *Solution :*



Exercice 26 : (⋆)
Faire une étude de fonctions.

Exercice 27 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. *Solution :* f est 2π-périodique et impaire.
3. *Solution :* $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$
4. *Solution :* $f(x) = \frac{x}{2}$
5. Utiliser la parité puis la périodicité.
6. *Solution :* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 28 : (⋆)
Utiliser les formules de trigonométrie.

1. *Solution :*$\dfrac{1-6x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$

2. *Solution :* $\frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

Exercice 29 : (★★)

- En utilisant la formule donnant $\tan(a+b)$, montrer que : $\tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$.
- En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} + k\pi$.
- Comme $\operatorname{Arctan} x, \operatorname{Arctan} y, \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $k \in \{-1, 0, 1\}$.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, remarquer que $k = -1$ et que $\operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
  On a donc $\operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan}(-y)$ donc $x < -y$, ainsi $x + y < 0$. De plus $\dfrac{x+y}{1-xy} > 0$. En déduire le signe de $1 - xy$.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, raisonner de même.

Exercice 30 : (★★)

1. Appliquer la fonction cosinus.
   Solution : $\{\frac{\sqrt{5}}{5}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   Solution : $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Exercice 31 : (★★)

1. Appliquer la fonction tangente.
   Solution : $\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   Solution : $\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\}$

Exercice 32 : (★★)

Montrer que $\tan\left(4\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}\right) = 1$ puis effectuer des encadrements.