Indications du chapitre 2 : Etude de fonctions, fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

I Continuité

II Dérivation

Exercice 1 :
Solution : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $f_1'(x) = -\frac{x^2-2}{(x^2-3x+2)^2}$, $\forall x \in]-\infty, 2[$, $f_2'(x) = \frac{4-x}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 2 :
Solution : $f'(x) = -\frac{2(x-2)}{(x-1)^3}$.

Exercice 3 : ($\star$)
Solution : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)^3}}$.

Exercice 4 : ($\star$)
Etudier le signe de f'. On peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.
Solution : f n'est pas décroissante sur son ensemble de définition.

Exercice 5 : ($\star$)
Etudier $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 6 : ($\star$)
Etudier $x \mapsto x^4 - x^2 - 2x - 2$.

III Bijectivité

Exercice 7 :
Montrer que f est strictement monotone.
Solution : f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $]5, +\infty[$.

Exercice 8 : ($\star$)
Résoudre l'équation $f(x) = y$.
Solution : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \mapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 9 : ($\star$)

1. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : f n'est pas bijective.
2. Résoudre l'équation $g(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [-1, 1[$.
   Solution : $g^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,1[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{array}$

Exercice 10 :

1. Etudier les variations de f.
   Solution : $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t$.
2. Montrer que f' ne s'annule pas et appliquer la formule de dérivation de la réciproque.
   Solution : g est dérivable sur $[0, +\infty[$ *et* $g'(t) = -\frac{g(t)^2}{2g(t)^3+1}$.

Exercice 11 : ($\star$)

1. Etudier la fonction f.
2. Etudier les points d'annulation de f'.
   Solution : f^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 1[$.
3. Utiliser la formule de la dérivée de la réciproque et remarquer que $f(1) = 1 - e$.
   Solution : $\left(f^{-1}\right)'(1-e) = -\frac{1}{3e}$

Exercice 12 : ($\star$)
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{2}x^{-5/2}$.

IV Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

Exercice 13 :

1. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$
2. *Solution :* $x \mapsto \frac{2x(\ln x - 1)}{(\ln(x))^3}$
3. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$
4. *Solution :* $x \mapsto -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
5. *Solution :* $x \mapsto (1-2x)e^{-2x}$
6. *Solution :* $x \mapsto \frac{2xe^{2x}}{(x+1)^3}$

Exercice 14 : (⋆)
Ne pas oublier de déterminer le domaine de définition de l'inéquation.
Solution : $\left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$.

Exercice 15 : (⋆)
Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$.

Exercice 16 :

1. *Solution :* 0
2. Factoriser par x^2 dans le logarithme.
   Solution : 0
3. *Solution :* 0

Exercice 17 : (⋆)

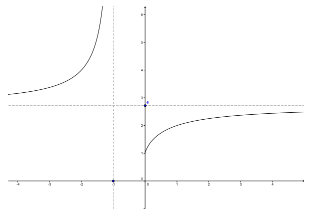
1. *Solution : la fonction est croissante sur* $]0, e^{-1/2}]$ *et décroissante sur* $[e^{-1/2}, +\infty[$ *et tend vers* $-\infty$ *en* 0 *et vers* 0 *en* $+\infty$.
2. *Solution : la fonction est croissante sur* $\mathbb{R}$, *tend vers* -1 *en* $-\infty$ *et vers* 1 *en* $+\infty$.

Exercice 18 : (⋆)

1. Etudier les variations de g et appliquer le théorème de la bijection à la fonction g sur un intervalle bien choisi.
2. *Solution : g est négative sur* $]-\infty, \alpha]$ *et positive sur* $[\alpha, +\infty[$.
3. Exprimer f' en fonction de g.
   Solution : f est décroissante sur $]0, \alpha]$ *et croissante sur* $[\alpha, +\infty[$.
4. Remarquer que f admet un mininum égal à $f(\alpha)$.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Calculer f' et étudier le signe de $g : x \mapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
Comparer $f\left(\frac{1}{a}\right)$ et $f\left(\frac{1}{b}\right)$.

Exercice 20 : (⋆)
Traduire les puissances en exponentielles et logarithmes.
Solution :



Exercice 21 : (⋆) Ecrire $f(x) = \exp\left(\frac{x}{x-1}\ln x\right)$. On a : $f'(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} > 0$. *Solution : f* est strictement croissante sur $[0,1[$ et sur $]1, +\infty[$.