# Indications du chapitre 27 : Fonctions de deux variables

## I Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

**Exercice 1 :**

1. Remarquer que $2x^5y^3 \le x^{10}+y^6 \le x^4(x^6+y^4)+y^2(x^6+y^4)$.
   *Solution :* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0)$ et $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y)$.
   *Solution : $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$.*
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x)$.
   *Solution : $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$.*

**Exercice 2 :**

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0)$ .
   *Solution : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.*
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x^2)$ et si $x_0\neq 0$, $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} f(x_0,y)$ .
   *Solution : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$.*
3. Montrer que $|f(x,y)|\le|y|$.
   *Solution : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

**Exercice 3 : ($\star$)**

1. Calculer la limite de $f$ en $(x_0,y_0)$ dans les cas suivants : $x_0=0$ et $y_0\neq 0$ ; $x_0\neq 0$ et $y_0=0$ ; $x_0=y_0=0$.
   *Solution : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\left(\{(x,0), x\in\mathbb{R}^*\}\cup\{(0,y), y\in\mathbb{R}^*\}\right)$ .*
2. Utiliser le théorème des accroissements finis.
   *Solution : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

## II Dérivées partielles

**Exercice 4 :**

1. Calculer les taux d'accroissements.
   *Solution :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$.
2. Calculer les taux d'accroissements.
   *Solution :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
3. Calculer les taux d'accroissements.
   *Solution : $f$ n'a pas de dérivée partielle par rapport à $x$ en $(0,0)$ et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

**Exercice 5 :**

Remarquer que $f(x,y)=x\int_0^y \varphi(t)\,dt-\int_0^y t\varphi(t)\,dt$.
*Solution :* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\int_0^y\varphi(t)\,dt$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x-y)\varphi(y)$.

**Exercice 6 : ($\star$)**

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y)\neq 0$ puis, en utilisant des taux d'accroissements $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\neq\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   *Solution : $f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.*
2. En utilisant les limites à gauche et à droite des taux d'accroissements, montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$.
   *Solution : $f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.*

**Exercice 7 : ($\star\star$)**

1. Considérer $(x_0,y_0)\in U$. On cherche $r$ tel que $B((x_0,y_0),r)\subset U$. Si $x_0\neq 0$, prendre $r=|x_0|$, si $x_0=0$, prendre $r=-y_0$.
   Utiliser les taux d'accroissement pour calculer les dérivées partielles en $(x_0,0)$, avec $x_0\in\mathbb{R}^*$.
   *Solution :* $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y & \text{si } (x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}\\ 3y & \text{si } (x,y)\in\mathbb{R}^{-*}\times\mathbb{R}^{-*}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$ .
   *$f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U$.*
2. *Solution : $f$ n'est pas constante par rapport à $x$ sur $U$, mais $\frac{\partial f}{\partial x}=0$. En effet, si $y\ge 0$, $f(.,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle.*

**Exercice 8 : ($\star\star\star$)**

Commencer par montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,-x), x\in\mathbb{R}\}$.
Calculer et simplifier $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et primitiver l'expression obtenue. Raisonner de même avec

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
*Solution :* $f(x, y) = (Arctan\, x + Arctan\, y).sgn(x + y)$.

**Exercice 9 :** $(\star\star)$

1. Calculer les dérivées partielles aux points différents de $(0,0)$ et utiliser les taux d'accroissement pour calculer les dérivées partielles en $(0,0)$. Utiliser des majorations de la valeur absolue des dérivées partielles pour prouver qu'elles sont continues en $(0,0)$.
2. Utiliser des taux d'accroissement pour calculer les 4 dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$.
*Solution :* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ puis $\lim_{x \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, x)$. *Solution :* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.

# III Dérivées partielles et composées

**Exercice 10 :**

1. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
2. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + y, x - y, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x + y, x - y, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + y, x - y, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x + y, x - y, y)$
3. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x)\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, f(x, x))$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y, f(x, x))$
4. *Solution :* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(xy, \frac{x}{y}\right)$.

**Exercice 11 :** $(\star\star)$

1. Calcul.
2. Utiliser la dérivation des fonctions composées.
3. Poser $\psi(u, v) = f(u, uv)$ et montrer que $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = 0$.
4. D'après la question précédente, si $f$ est solution, il existe une fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u, uv) = g(v)$.
*Solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & g\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$.

**Exercice 12 :** $(\star\star)$

Montrer que si $f$ est solution alors $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial \theta}(r, \theta) = k f \circ g(r, \theta)$. En déduire que $f \circ g(r, \theta) = \varphi(r)e^{k\theta}$.
*Solution :* $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \varphi(r)e^{k\theta}$ *où* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$. *Si* $k \neq 0$, *l'équation n'a pas de solution continue sur* $\mathbb{R}^2$, *si* $k = 0$, *toutes les solutions sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.

# IV Extremums

**Exercice 13 :** $(\star)$

1. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer $f(x, 0)$ et conclure.
*Solution :* $f$ *n'admet pas d'extremum local.*
2. Le seul point critique est $(0,0)$. Etudier le signe de $f$ et conclure.
*Solution :* $f$ *admet* $0$ *comme minimum global, il est atteint en* $(0,0)$.

**Exercice 14 :** $(\star)$

1. Le seul point critique est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Montrer que $f\left(\frac{1}{3} + h, \frac{1}{3} + k\right) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = h^2 + k^2 + (h + k)^2$. Conclure.
*Solution :* $f$ *admet* $\frac{1}{3}$ *comme minimum global, il est atteint en* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
2. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer $f(x, 0)$ puis $f(x, \lambda x^2)$ en choisissant bien $\lambda$ et conclure.
*Solution :* $f$ *n'admet pas d'extremum local.*
3. Le seul point critique est $(0,0)$. Calculer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x, -x^3)$ et conclure.
*Solution :* $f$ *n'admet pas d'extremum local.*