Indications du chapitre 26 : Séries numériques

I Convergence et divergence

Exercice 1 :
Faire apparaître une ou deux séries télescopiques.
Solution : $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 2 : ($\star$)
Ecrire la décomposition en éléments simples de $\frac{3X+2}{X(X+1)(X+2)}$ et faire apparaître une série télescopique.
Solution : 2

Exercice 3 : ($\star\star$)
Montrer que : $\dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}=\dfrac{1}{1-(2/3)^n}-\dfrac{1}{1-(2/3)^{n+1}}$.
Solution : 2

II Séries à termes positifs

Exercice 4 :
Etudier $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(w_n-u_n)$ qui est une série à terme général positif.

Exercice 5 : ($\star$)
Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que la suite des sommes partielles est majorée.
Solution : $\sum v_n$ *converge.*

Exercice 6 : ($\star\star$)
Remarquer que pour $k\in[\![\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,n]\!]$, $u_n\leq u_k$ et sommer ces inégalités.

Exercice 7 : ($\star\star$)

1. On pose : $u_n=\frac{1}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$. En remarquant que $a_n=(a_n+1)-1$, on a $v_n=u_{n-1}-u_n$ et faire apparaître une somme télescopique.
2. En utilisant les sommes télescopiques, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}v_k=1-u_n$.
   En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n=1\Leftrightarrow\lim\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)}=0$. Or, en utilisant le logarithme, montrer que :
   $$\lim\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)}=0\Leftrightarrow\lim\sum_{k=0}^{n}\ln(1+a_k)=+\infty.$$
   Montrer une implication en utilisant : $\forall x\in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x)\leq x$ et l'autre implication en raisonnant par l'absurde et en utilisant $\ln(1+x)\sim x$.

Exercice 8 : ($\star\star$)

1. (a) Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang puis en déduire que $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   (b) Se ramener, à partir d'un certain à rang, à la comparaison avec une série géométrique convergente.
2. (a) Montrer que $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=2(\sin\alpha)^2$ et utiliser la question 1. dans le cas $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$.
   (b) Montrer que $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{e}$ et utiliser la question 1.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
   (c) Montrer que $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$ et utiliser la question 1.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
   (d) Montrer que $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ et utiliser la question 1.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 9 : ($\star$)
Si $\sum u_n$ converge, utiliser la comparaison des séries à termes positifs.
Si $\sum v_n$ converge, montrer que $u_n\sim v_n$.
Solution : $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Exercice 10 : ($\star\star$)

1. Utiliser la définition de la limite et sommer les inégalité de n à N.
2. Utiliser la définition de la limite et faire un découpage de somme.

Exercice 11 :
Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{3/2}$.
Solution : $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 12 :

1. Montrer que $u_n \sim \dfrac{\pi^2(\ln n)^{1000}}{2n^2}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
2. Montrer que $v_n \sim \dfrac{2a-9}{6n}$, si $a \neq \frac{9}{2}$ et $v_n \sim -\frac{9}{8n^3}$, si $a = \frac{9}{2}$.
   Solution : $\sum v_n$ *converge ssi* $a = \frac{9}{2}$.

Exercice 13 :

1. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$.
   Solution : $\sum u_n$ *diverge.*
3. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
   Solution : $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 14 :
Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim -\frac{3}{n^2}$.
Solution : $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 15 : (★★)

1. Utiliser la comparaison série-intégrale.
   Solution : $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
2. Encadrer, de la même façon que pour la comparaison série-intégrale, $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ et faire tendre N vers $+\infty$.
   Solution : $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

Exercice 16 : (★★)
Si $p = 0$ ou 1, minorer u_n par le terme général d'une série divergente.
Si $p \geq 3$, majorer u_n par les terme général d'une série convergente.
Si $p = 2$, majorer u_n par la somme de deux termes généraux de séries convergentes.
Solution : $\sum u_n$ *converge ssi* $p \geq 2$.

Exercice 17 : (★★)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \frac{n^2}{2} \leq k^2 + (n-k)^2 \leq 2n^2.$$

En déduire un encadrement de u_n faisant apparaître le terme général d'une série de Riemann.
On peut également faire apparaître des sommes de Riemann pour montrer que $u_n \sim \frac{l}{n^{2\alpha-1}}$ avec $l > 0$.
Solution : La série converge ssi $a > 1$

Exercice 18 : (★★)
Se ramener à l'étude de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ et calculer un équivalent de $u_n - u_{n-1}$.

Exercice 19 : (★★)
Refaire le raisonnement de l'exercice 18 pour montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = S_n - \ln n - \gamma$.
On a alors $\lim t_n = 0$.
Montrer que $t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ puis, comme dans l'exercice 15, que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.
En déduire la conclusion.

Exercice 20 : (★★)
Si $\lambda > 1$, considérer $l \in]1, \lambda[$ et montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq \frac{1}{n^l}$.
Si $\lambda < 1$, considérer $l \in]\lambda, 1[$ et montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq \frac{1}{n^l}$.

Exercice 21 : (★★★)
Poser $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$. Montrer que $S_n \geq \sum_{k=1}^{n} k$ en utilisant l'injectivité de φ.

III Séries absolument convergentes

Exercice 22 :

1. Montrer que $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
2. Majorer $|u_n|$ par une quantité équivalente à $\frac{1}{2n^2}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
3. Majorer $|u_n|$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*

4. Majorer $|u_n|$ et utiliser un équivalent.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 23 : ($\star$)

1. Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim \frac{2-k}{2n}$ et traiter le cas particulier $k=2$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge ssi* $k=2$.
2. Montrer, en effectuant un développement limité, que $u_n \sim \frac{e^2(2a^2-1)}{n}$ et traiter les cas particuliers $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge ssi* $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 24 : ($\star\star$)

1. Poser $v_n=\ln(n^a u_n)$ et montrer que $v_{n+1}-v_n=O(\frac{1}{n^2})$.
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{b-a}{n}+O(\frac{1}{n^2})}$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge ssi* $b-a>1$.

Exercice 25 : ($\star\star$)

1. (a) Utiliser la définition des suites adjacentes.
   (b) Utiliser un résultat sur les suites extraites.
2. (a) Distinguer les cas $\alpha\leq 0$, $0<\alpha\leq 1$ et $\alpha>1$.
   Solution : si $\alpha\leq 0$ *la série diverge, si* $0<\alpha\leq 1$ *la série convege mais ne converge pas absolument et si* $\alpha>1$ *la série converge absolument.*
   (b) Montrer que : $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2en}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
   (c) Montrer que : $u_n=\dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*
   (d) Effectuer le changement de variable $t=x-n\pi$ et faire apparaître une série alternée.
   Solution : $\sum u_n$ *converge.*