Indications du chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire

Exercice 1 :
Utiliser la définition d'un produit scalaire.

II Norme associée à un produit scalaire

Exercice 2 :
Utiliser l'identité du parallélogramme.

Exercice 3 : ($\star$)
Remarquer que $n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2$.
Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs bien choisis.
Solution : On a égalité ssi $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$

Exercice 4 : ($\star$)
Se ramener au cas où $f > 0$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$.

Exercice 5 : ($\star$)
Utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle.

Exercice 6 : ($\star\star$)
Montrer que $1 + f^2 \leq (1+f)^2$ pour obtenir la majoration de l'intégrale.
Pour la minoration, remarquer que $\sqrt{(\sqrt{1+f^2}+f)}\sqrt{(\sqrt{1+f^2}-f)} = 1$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 7 : ($\star$)

1. Utiliser la définition.
2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et $g : t \longmapsto t$.

III Orthogonalité

Exercice 8 : ($\star\star$)
Utiliser la définition de l'orthogonal et raisonner par double inclusion.

Exercice 9 : ($\star\star$)

1. Pour montrer que $f = 0$ sur $]0,1]$ se ramener à une fonction continue et positive d'intégrale nulle puis utiliser un argument de continuité pour montrer que $f = 0$.
   Solution : f et g sont orthogonaux.
2. *Solution : $H^\perp = \{0\}$, $H^{\perp\perp} = E$.*

Exercice 10 : ($\star\star$)
Remarquer que $D_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ et traduire l'orthogonal avec les vecteurs $E_{i,i}$.
Solution : L'ensemble des matrices de diagonale nulle.

Exercice 11 : ($\star\star$)

1. Utiliser la définition.
2. Utiliser les résultats sur les dérivées des polynômes.
   Solution : L_p est de degré p et de coefficient dominant : $\frac{(2p)!}{p!}$.
3. Réaliser q intégrations par parties et remarquer que 0 et 1 sont racines de multiplicité q de Q_q.
   Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale et compter les vecteurs.
   Solution : $< L_p, L_q >= 0$ pour $p \neq q$.
4. Effectuer p intégrations par parties.
   Solution : $\|L_p\| = \frac{p!}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 12 :
Utiliser l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Solution : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

Exercice 13 :
Utiliser le procédé d'orthonormaliation de Gram-Schmidt.
Solution : $\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(3,-2,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{35}}(3,3,-4,1)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,-2)$.

Exercice 14 : (⋆)

1. Utiliser la définition du produit scalaire.
2. Utiliser le procédé d'orthonormaliation de Gram-Schmidt.
   Solution :$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}X$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(X^2-\frac{1}{3})$, $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(X^3-\frac{3}{5}X)$.

Exercice 15 : (⋆)

Utiliser la définition du produit scalaire.
Solution :$(1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(2,1,0)$, $\sqrt{2}(-1,-\frac{1}{2},1)$.

Exercice 16 : (⋆)

1. Utiliser la définition.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Solution : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2-2X+\frac{1}{3})\right)$

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

Exercice 17 :

Utiliser l'écriture matricielle du produit scalaire.
Pour les normes, utiliser le théorème de Pythagore.

Exercice 18 : (⋆⋆)

Appliquer l'hypothèse à $x=e_j$ pour montrer que la famille est orthogonale. Pour montrer que c'est une base, calculer $\|x-\sum_{k=1}^{n}(e_k|x)e_k\|^2$.

Exercice 19 : (⋆⋆)

1. Montrer que si $x\in\ker(\varphi-id_E)$ et $y\in\mathrm{Im}(\varphi-id_E)$, alors $(x|y)=0$ et en déduire une inclusion. Utiliser les dimensions pour prouver l'égalité.
2. Remarquer que $(\varphi-id_E)^2=0_{\mathcal{L}(E)}\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi-id_E)\subset\ker(\varphi-id_E)$ et utiliser la question précédente.

V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Exercice 20 :

Expliciter les coefficients du projeté orthogonal d'un vecteur quelconque en résolvant un système ou en utilisant une base orthonormée de F.

Solution : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$

Exercice 21 :

Expliciter les coefficients du projeté orthogonal d'un vecteur quelconque en résolvant un système ou en utilisant une base orthonormée de F.

Solution : $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-4&-1&2\\-4&7&-2&-1\\-1&-2&7&-4\\2&-1&-4&3\end{pmatrix}$

Exercice 22 :

1. Soit q la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$. On a $p(x)=x-q(x)$. Remarquer que $(\frac{u}{\|u\|})$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u)$. Utiliser la formule de calcul d'une projection orthogonale dans une base orthonormée pour calculer $q(x)$.
2. Utiliser $s=2p-Id$.

Exercice 23 : (⋆⋆)

Si $\forall x\in E$, $\|p(x)\|\leq\|x\|$, montrer que $\mathrm{Im}\,p\subset(\ker p)^{\perp}$, en utilisant $E=\ker p\oplus(\ker p)^{\perp}$ et conclure, en utilisant les dimensions, sur l'égalité de ces espaces.

Exercice 24 : (⋆)

1. Orthonormaliser la famille (e_1,e_2).
   Solution : (f_1,f_2) *avec* $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$ *et* $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$.
2. Chercher les vecteurs orthogonaux à e_1 et e_2.
   Solution : $F^{\perp}=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$.
3. Utiliser la relation $p(x)=(x|f_1)f_1+(x|f_2)f_2$.
   Solution : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$
4. Exprimer la distance en fonction de la projection orthogonale.
   Solution : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 25 : (⋆⋆)

1. Utiliser la défintion du produit scalaire.
   Solution : E est de dimension infinie donc non euclidien.

2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Solution : 1, $\sqrt{12}(X-\frac{1}{2})$, $\sqrt{180}(X^2-X+\frac{1}{6})$.
3. Remarquer que $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2dt = d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2-p(X^2)\|^2$ où p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$, puis calculer $p(X^2)$ en utilisant la base de la question précédente.
   Solution : $\frac{1}{180}$

Exercice 26 : (⋆)
Remarquer que $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u=(1,2,-3,1)$ et exprimer la projection orthogonale de x sur $F^{\perp}$. Faire ensuite le lien avec la distance.
Solution : $\frac{1}{\sqrt{15}}$

Exercice 27 : (⋆)
Remarquer que $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(X^3+X^2+X+1)$ et exprimer la projection orthogonale de X sur $F^{\perp}$. Faire ensuite le lien avec la distance.
Solution : $\frac{3}{2}$

Exercice 28 : (⋆⋆)
Remarquer que : $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|M-aI_n-bU\| = d(M,\mathrm{Vect}(I_n,U)) = \|M-p(M)\| = \sqrt{(M-p(M),M)}$ et écrire un système.
Solution : 0 *si* $n=1$, $\sqrt{\|M\|^2+\dfrac{s-nt}{n(n-1)}t+\dfrac{t-s}{n(n-1)}s}$ *sinon, où* $t=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}m_{i,i}$ *et* $s=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}$.

Exercice 29 : (⋆⋆)
1. Il reste uniquement à prouver que I et P sont orthogonaux.
2. Calculer la partie paire ou la partie impaire de f.
   Solution : $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3}$