Indications du chapitre 24 : Déterminants

I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Exercice 1 :
Solution : $\det A = 21$ *et* $\det B = 21$.

Exercice 2 : (⋆)

1. On choisit des valeurs de x telles que $C_1 = C_2$, puis telles que $C_1 = -C_3$
   Solution : $\pm 2, \pm 3$
2. Développer D en utilisant la règle de Sarrus. Sans simplifier l'expression obtenue, étudier la forme de D.
   Solution : D est une fonction polynomiale de degré 4.
3. Comme D est un polynôme de degré 4 admettant ± 2 et ± 3 comme racines, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$D(x) = \lambda(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$
   Comme λ est le coefficient dominant de D, on utilise l'expression de 2. pour le calculer.
   Solution : $D(x) = 2(x^2-4)(x^2-9)$

Exercice 3 :
Se ramener au calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.
Solution : La famille est une base.

II Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 4 : Se placer dans la base canonique.
Solution : $\det u = (n+1)!$

Exercice 5 : (⋆)
Se placer dans la base $(1, X, X^2)$.
Solution : $\det \varphi = 1$

Exercice 6 : (⋆⋆)
Remarquer que $\det(f^3) = \det(-2f)$.
Solution : $\{0, \pm 2^{n/2}\}$ *si n pair,* $\{0\}$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et n impair,* $\{0, \pm i2^{n/2}\}$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et n impair*

III Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 7 : (⋆)

1. On peut appliquer la règle de Sarrus.
2. Remarquer que :
$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :
Utiliser les déterminants de la transposée et de l'opposé.

Exercice 9 : (⋆)

1. Calculer le déterminant de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(u_i)$ en fonction de u_i pour $i \in [\![1,4]\!]$.
   Solution : $B = diag(1,2,3,4)$
3. *Solution :* $\det B = \det f = \det A = 24$

IV Calcul des déterminants

Exercice 10 :
Trouver une forme factorisée du déterminant de $M(\lambda)$.
Solution : $\lambda \notin \{2, -4\}$

Exercice 11 :
Effectuer les opérations : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $C_i \leftarrow C_i - C_{i-1}$.
Solution : 1

Exercice 12 : (⋆⋆)
Effectuer des opérations bien choisies sur les lignes et les colonnes.
Solution : $-(n-1)(-2)^{n-2}$

Exercice 13 : (⋆⋆) Effectuer les opérations $C_j \leftarrow C_j + C_{j-1}$ pour j allant de p à 2 et utiliser la formule du triangle de Pascal.
Solution : 1

Exercice 14 : (⋆)
Déterminer la matrice de u_A dans la base canonique.

Exercice 15 :
Développer Δ_{n+1} par rapport à la première ligne.
Solution : $\Delta_{n+1} = 2\Delta_n$ *et* $\Delta_n = 2^{n-1}$

16

Exercice 16 : (⋆)
Effectuer une preuve par récurrence et développer, par exemple, par rapport à la première colonne.

Exercice 17 : (⋆)
Effectuer les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour $j \in [\![2, n]\!]$ puis développer par rapport à la dernière ligne.
Solution : $a_1(a_1 - a_2)^{n-1}$

Exercice 18 : (⋆⋆)
Développer par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne pour obtenir la relation de récurrence d'ordre 2 : $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.
Solution : $\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ *si* $a \neq b$, $(n+1)a^n$ *si* $a = b$.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Considérer la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}$, remarquer qu'elle est inversible en utilisant le déterminant de Vandermonde.
Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{s} a_k \lambda_k^n$. Montrer que :

$$M \begin{pmatrix} a_1\lambda_1^n \\ \vdots \\ a_s\lambda_s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+s-1} \end{pmatrix}.$$

En déduire la limite de $\begin{pmatrix} a_1\lambda_1^n \\ \vdots \\ a_s\lambda_s^n \end{pmatrix}$.
Conclure en utilisant l'hypothèse sur les modules de λ_1, λ_s.

Exercice 20 : (⋆ ⋆ ⋆)
Utiliser, en le justifiant, la continuité de $x \mapsto \det(A + xB)$.