

Indications du chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

I Univers, événements, variables aléatoires

II Espaces probabilisés finis

Exercice 1 :

Le nombre d'événements tels que toutes les faces donnent un chiffre différent est le même que le nombre de bijection de $[[1, 6]]$ dans lui-même.

$$\text{Solution : } \frac{5}{324}$$

Exercice 2 : (★)

1. (a) $\text{Solution : } P(A) = \frac{9}{91}$
 (b) $\text{Solution : } P(B) = \frac{455}{81}$
 (c) $\text{Solution : } P(C) = \frac{455}{94}$
2. (a) $\text{Solution : } P(A) = \frac{2}{25}$
 (b) $\text{Solution : } P(B) = \frac{19}{125}$
 (c) $\text{Solution : } P(C) = \frac{19}{75}$

Exercice 3 :

Considérer les événements : A : "les deux boules tirées sont paires" et B : "les deux boules tirées sont impaires".

1. $\text{Solution : } \frac{4}{9}$
2. $\text{Solution : } \frac{4}{9}$
3. $\text{Solution : } \frac{41}{81}$

Exercice 4 :

Remarquer que $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$$\text{Solution : } P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Exercice 5 : (★★)

1. Considérer les événements : A_i " la boule du $r^{\text{ième}}$ tirage est la boule numéro i " et calculer $P(E_r \cap A_i)$.

$$\text{Solution : } \frac{1}{n^r} \sum_{j=1}^n j^{r-1}.$$

2. $\text{Solution : } \frac{n+1}{2n}$

3. Reconnaître une somme de Riemann.

$$\text{Solution : } \frac{1}{r}$$

Exercice 6 : (★)

1. Il s'agit d'un tirage successif avec remise, donc $\text{Card}(\Omega) = \dots$
 On cherche le nombre de tirages de n éléments distincts avec ordre, il y a donc ... possibilités.

Conclure.

$$\text{Solution : } \frac{M!}{(M-n)!M^n}$$

2. L'événement contraire est les élèves ont tous leurs anniversaires à des jours différents ce qui équivaut à un tirage de n jetons distincts dans une urne contenant 365 jetons.

$$\text{Solution : } 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

Exercice 7 : (★★)

1. (a) Choisir les $p-1$ premières boules parmi les boules ayant un numéro inférieur ou égal à $k-1$.

$$\text{Solution : } \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}$$

- (b) Remarquer que la famille (A_k) forme un système complet d'événements.

2. Considérer l'événement C_k : "le maximum des boules tirées est k " et calculer $P(B \cap C_k)$ où B : "la $p^{\text{ième}}$ boule tirée a un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents".

$$\text{Solution : } \frac{1}{p}$$

III Probabilités conditionnelles

Exercice 8 : (★) Utiliser la formule des probabilités composées.

Solution : $\frac{1}{5}$

Exercice 9 : (★★)

Utiliser la formule des probabilités composées.

1. *Solution :* $\frac{2^{k-1}}{3^k}$

2. *Solution :* $\frac{1}{3 \times 2^{k-2}}$

3. *Solution :* $\frac{1}{3}$ si $k \in \{1, 2, 3\}$ et 0 sinon.

Exercice 10 : (★) ✨

1. Remarquer que J_1 gagne au n -ième coup ssi la somme des dés aux coups précédents était différente de 6 et 7 et la somme des dés au n -ième coup est 6 et utiliser la formule des probabilités composées.

Solution : $\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \frac{5}{36}$

2. p_n est la somme des probabilités des événements " J_1 gagne au k -ième coup" pour k allant de 1 à n .

Solution : $1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n \frac{5}{11}$

3. q_n est la somme des probabilités des événements " J_2 gagne au k -ième coup" pour k allant de 1 à n .

Solution : $1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n \frac{6}{11}$

4. *Solution :* $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{11}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{6}{11}$.

Exercice 11 : 📖

1. Appliquer la formule des probabilité totales avec les événement A_i : "la pièce provient de la machine M_i ".

Solution : $\frac{29}{1000}$

2. Utiliser une intersection.

Solution : $\frac{1}{100}$

3. Utiliser la définition des probabilités conditionnelles.

Solution : $\frac{10}{29}$

Exercice 12 : (★)

1. *Solution :* $a_n + b_n + c_n = 1$

2. Appliquer la formule des probabilité totales avec les événement A_n, B_n et C_n .

Solution : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n, b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n, c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n$

3. Soustraire les relations précédentes.

4. Utiliser les questions 1 et 3.

Solution : $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), b_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), c_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Exercice 13 : (★) ✨

1. Utiliser la formule des probabilités totales et reconnaître une suite arithmético-géométrique.

Solution : $p_n = \frac{1-b}{2-a-b} + \frac{1-a}{2-a-b} (a+b-1)^n$

2. *Solution :* $\frac{1-b}{2-a-b}$

Exercice 14 : 📖 ✨

On considère les événements : A_j : "on obtient j piles à la première étape" et B_j : "le gain est j ".

1. Remarquer que $B_0 = A_0 \cup (A_1 \cap B_0) \cup (A_2 \cap B_0)$ et utiliser des probabilités conditionnelles.

Solution : $\frac{25}{64}$

2. Appliquer la formule de Bayes au système complet (A_0, A_1, A_2) .

Solution : $\frac{1}{5}$

Exercice 15 : (★★) ✨

On peut considérer que la porte choisie par le candidat à le numéro 1. Utiliser la formule de Bayes pour calculer la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2.

Solution : Le candidat doit changer son choix.

IV Loi d'une variable aléatoire

Exercice 16 : (★)

L'événement $(X = k)$ correspond aux tirages de la forme : $(0, \dots, 0, 1, x_{k+1}, \dots, x_N)$.

On peut poser $X = N + 1$ lorsque les N tirages ne donnent que des faces.

Solution : $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(X = N + 1) = \frac{1}{2^N}$

Exercice 17 : 📖

Calculer $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 18 : (★★)

1. *Solution* : $X_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$
2. Calculer $P(Y = 1)$, puis $P(Y = 2)$ en remarquant que : $P(X_3 = 0) = P(X_1 = n) + P(X_2 = n) + P((X_1 \neq n) \cap (X_2 \neq n) \cap (X_3 = 0))$, puis $P(Y = 3)$.
Solution : $P(Y = 1) = \frac{1}{3^{n-1}}$, $P(Y = 2) = 3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$, $P(Y = 3) = 1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 19 : 

On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une dame} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un coeur} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution :

	Y	0	1
X			
0		3/4	1/8
1		1/8	0

	Z	0	1
X			
0		21/32	7/32
1		3/32	1/32

$X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{8}), Y \sim \mathcal{B}(\frac{1}{8}), Z \sim \mathcal{B}(\frac{1}{4})$.

V Événements indépendants

Exercice 20 : (★★) 

1. On note u_k : "L'urne contient k boules noires". Utiliser la formule des probabilités totales au système complet d'événements : (U_0, U_1, U_2, U_3) .
Solution : $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}$, les événements ne sont pas deux à deux indépendants.
2. Utiliser la formule des probabilités totales au système complet d'événements : (U_0, U_1, U_2, U_3) .
Solution : $P(B^n) = \frac{3^{n-1} + 2n^n + 1}{8 \times 3^{n-1}}$
3. Utiliser la formule de Bayes.
Solution : $P(U_0|B^3) = \frac{1}{2}$
4. *Solution* : $P(B_4|B^3) = \frac{22}{27}$

Exercice 21 : (★★)

1. On note A_k : "la première génération compte k individus". Utiliser la formule des probabilités totales au système complet : (A_0, A_1, A_2, A_3) .

Solution : $\frac{729}{4096}$

2. Partir de la 1ère génération et regarder la probabilité pour qu'elle s'éteigne en n générations.
3. Utiliser la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{8}(1+x)^3$ et montrer que $[0, -2 + \sqrt{5}]$ est stable par f .

Exercice 22 : (★★) 

On note :

A_k : "le joueur A gagne à la partie k "

B_k : "le joueur B gagne à la partie k "

U_k : "le dé donne 1 ou 2 à la partie k "

V_k : "le dé donne 3,4 ou 5 à la partie k "

1. Remarquer que $P(A_{2k}) = 0$.
 Remarquer que $P(A_{2k+1}) = P(\overline{U_1} \cap \overline{V_2} \cap \dots \cap \overline{U_{2k-1}} \cap \overline{V_{2k}} \cap U_{2k+1})$, et que $P(\overline{U_{2j+1}}) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{V_{2j}}) = \frac{1}{2}$ et utiliser l'indépendance mutuelle de ces événements.

Raisonner de même pour $P(B_k)$.

Solution : $P(A_{2k}) = 0, P(A_{2k+1}) = \frac{1}{3^{k+1}}, P(B_{2k+1}) = 0, P(B_{2k}) = \frac{1}{3^k}$

2. La probabilité que A gagne en moins de n parties est $P(\cup_{k=0}^n A_k) = \dots = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P(A_{2j+1})$

et se ramener à une somme géométrique.

Solution : $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}} \right)$ pour A et $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right)$ pour B

VI Variables aléatoires indépendantes

Exercice 23 : 

1. *Solution* : $P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{9}, P(X = 1, Y = -1) = \frac{2}{9}, P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{9}, P(X = -1, Y = -1) = \frac{2}{9}$, X et Y ne sont pas indépendantes.
2. *Solution* : X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Exercice 24 : (★)

Calculer $P(U \leq k)$ et $P(V \geq k)$.

Solution : $P(U = k) = \frac{2k-1}{n^2}, P(V = k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$

Exercice 25 : (★★) 

Remarquer que, pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$: $P(S = k) = \sum_{j=0}^n P(S = k|X = j)P(X = j) = \dots =$

$$\sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(n, k)} P(X=i)P(Y=k-i).$$

Calculer cette somme.

Solution : $P(S=k) = \frac{k+1}{(n+1)^2}$ si $0 \leq k \leq n$, $P(S=k) = \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$ si $k > n$

Exercice 26 : (★★) ✎

Introduire l'événement : $A_{k,i}$ "le numéro k est sorti au tirage i " et remarquer que $(X_i = 1) = \bigcup_{k=0}^N \overline{A_{k,1}} \cap \dots \cap \overline{A_{k,i-1}} \cap A_{k,i}$. *Solution* : $P(X_i = 1) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{i-1}$ et les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes pour $i \neq j$.