Indications du chapitre 21 : Dénombrement

Exercice 1 : (⋆⋆)
Utiliser l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\}. \end{array}$$

Exercice 2 : (⋆⋆)

1. Utiliser l'application :
$$\begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$
2. Remarquer que f surjective signifie $f(E) = F$.
3. Remarquer que si f est injective alors $\begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective.

Exercice 3 : (⋆) Ecrire E comme une union d'ensemble disjoints.
Solution : $\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4 : (⋆⋆)
On a : $E = (X\cap Y)\cup(X\cap\overline{Y})\cup(\overline{X}\cap Y)\cup(\overline{X}\cap\overline{Y})$ et il s'agit de réunions disjointes. Donc :

$$\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(X\cap Y) + \mathrm{Card}\,(X\cap\overline{Y})$$
$$+\mathrm{Card}\,(\overline{X}\cap Y) + \mathrm{Card}\,(\overline{X}\cap\overline{Y}).$$

Ainsi :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(E) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Y) + \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap\overline{Y})$$
$$+\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,\overline{X}\cap Y) + \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(\overline{X}\cap\overline{Y}).$$

De plus, en effectuant le changement de variable $Z = \overline{Y}$, on a :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap\overline{Y}) = \sum_{(X,Z)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Z) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Y).$$

En raisonnant de même sur les autres sommes, on a :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(E) = 4\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Y).$$

De plus :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(E)\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}1 = \mathrm{Card}\,(E).(2^n)^2.$$

Conclure.
Solution : $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Y) = n2^{2(n-1)}$.
On a :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cup Y) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X) + \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(Y)$$
$$-\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cap Y)$$

Or :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X) = \sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{Card}\,(X)\sum_{Y\in\mathcal{P}(E)}1 = 2^n\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{Card}\,(X)$$

Conclure en utilisant le résultat de l'exercice 8 (qu'il faut redémontrer ici).
Solution : $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\mathrm{Card}\,(X\cup Y) = 3n2^{2(n-1)}$.

Exercice 5 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence et utiliser le fait qu'il y a deux types de parties à k éléments dans $[\![1, n+1]\!]$: celles qui contiennent $n+1$ et celles qui ne le contiennent pas.

Exercice 6 :

1. Se ramener à l'ensemble $E\setminus\{a,b\}$.
Solution : 2^{n-2}
2. Déterminer le nombre de parties de E ne contenant pas a.
Solution : 2^{n-1}

Exercice 7 : (⋆⋆)
Effectuer le changement de variable $Y = \overline{X}$.

Exercice 8 :

1. *Solution :* $\frac{15!}{10!} = 360360$ *tirages possibles*
2. Choisir d'abord les boules blanches et les boules noires puis les placer.
Solution : $\binom{5}{2}.\binom{10}{3}.5! = 144000$ *tirages possibles*

Exercice 9 :

1. *Solution :* 9^6
2. *Solution :* $\frac{9!}{3!}$
3. *Solution :* 5×9^5
4. *Solution :* 2^6

Exercice 10 : ($\star\star$)

1. (a) *Solution :* $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ *tirages possibles*
   (b) Ce la revient à tirer sans remise et en tenant compte de l'ordre $k-1$ boules parmi $n-1$.
   Solution : $\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!}$ *tirages possibles*
2. (a) *Solution :* n^k *tirages possibles*
   (b) Choisir les deux boules, puis dénombrer les possibilités contenant au plus ces deux boules.
   Solution : $n(n-1)(2^{k-1}-1)$ *tirages possibles*

Exercice 11 :

1. *Solution :* $\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ *tirages possibles*
2. *Solution : 1200 tirages possibles*

Exercice 12 :

1. *Solution :* $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ *mains*
2. *Solution :* $4.\begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}$ *mains*
3. Utiliser le complémentaire.
   Solution : $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix}$ *mains*
4. Utiliser le complémentaire.
   Solution : $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \end{pmatrix}$ *mains*

Exercice 13 : ($\star$)

1. Choisir un élément de A puis les autres éléments dans $E \setminus A$.
   Solution : $p\begin{pmatrix} n-p \\ k-1 \end{pmatrix}$
2. Dénombrer les parties ne contenant aucun élément de A.
   Solution : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-p \\ k \end{pmatrix}$

Exercice 14 : ($\star\star$)

Choisir $p \in [\![0,n]\!]$, puis Z partie de E à p éléments, puis $k \in [\![0,p]\!]$, puis Y partie de Z à k éléments, puis $X \in \mathcal{P}(Y)$.
Solution : 4^n

Exercice 15 : ($\star\star$)

- Les partitions en deux éléments sont de la forme $(A,\overline{A})$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Pour le choix du couple $(A,\overline{A})$, il y a donc $2^n - 2$ possibilités. Il faut diviser par $2! = 2$ pour ne pas prendre en compte l'ordre.
  Solution : Le nombre de partitions de E en deux parties est $2^{n-1} - 1$
- On dénombre les triplets (A,B,C) formant une partition de E :
  - Choix de A de cardinal $k \in [\![1, n-2]\!]$,
  - Choix de B tel que $B \subset E \setminus A$, $B \neq \emptyset$ et $B \neq E \setminus A$.
  - Choix de C : 1 possibilité

  Soit, au total : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k}(2^{n-k}-2)$ possibilités.
  Il faut ensuite passer du triplet (A,B,C) à l'ensemble $\{A,B,C\}$
  Solution : Le nombre de partitions de E en trois parties est $\frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$