

Indications du chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

Exercice 1 :

Solution : Pour $u_1 : (1 \dots 1)$ (matrice à $n+1$ colonnes), pour $u_2 : (1 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n+1})$, pour $u_3 :$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } u_4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : (★)

Solution : $\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (★★)

Considérer $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f^{i-1}(x) = 0$ et appliquer f^{n-1} à cette égalité pour en déduire que $\lambda_1 = 0$. Réitérer cette méthode pour prouver que la famille est libre.

Solution : $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : (★★)

Remarquer que $f(e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) + (\alpha - \beta)e_j$.

En déduire $f(e'_j)$ en fonction des (e_i) .

En remarquant que $e_j = e'_j - e'_{j-1}$ si $j \neq 1$, en déduire $f(e'_j)$ en fonction des (e'_i) .

Conclure.

Solution : $\begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ \beta & 2\beta & \dots & (n-1)\beta & \alpha - \beta + n\beta \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

Pour le calcul de l'inverse, remarquer que $f \circ f = Id$.

Solution : $A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 : (★)

1. Montrer que u est linéaire et étudier son noyau.
2. Calculer l'inverse de la matrice de u dans les bases canoniques.

Solution : $u^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $(a, b, c) \mapsto a + \left(-\frac{3}{2}a + 2b - \frac{1}{2}c\right)X + \left(\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c\right)X^2$

Exercice 7 : (★★)

1. Utiliser les définitions et la formule du binôme de Newton.
 Solution : La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est A .
2. Exhiber (en le vérifiant) l'application réciproque de f et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution : $A^{-1} = (b_{i,j})$ avec :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, b_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

Exercice 8 : (★★)

Solution : $\ker f = \text{Vect}(1, 1, 1)$, $\text{Im } f = \text{Vect}((2, -1, -1), (-1, 2, -1))$. La matrice de f dans la

base $((1, 1, 1), (2, -1, -1), (-1, 2, -1))$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ qui est la composée de l'homothétie vectorielle de rapport 3 et de la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\ker f$.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Exercice 9: (★)

1. Utiliser les définitions.

Solution : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker A$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im } A$.

2. Utiliser les bases canoniques.

Solution : $((3, 1, 1))$ est une base de $\ker u$, $(-X + 1, X^2 + X - 3)$ est une base de $\text{Im } u$.

Exercice 10: Utiliser les définitions.

Solution : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker A$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im } A$, $\text{rg } A = 2$.

Exercice 11: (★)

Utiliser le critère d'inversibilité des matrices triangulaires.

Solution : $\text{rg}(u + \lambda v) = 4$ si $\lambda \neq -1$ et $\text{rg}(u + \lambda v) = 3$ si $\lambda = -1$.

Exercice 12: (★)

Pour $a \neq 1$ effectuer les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_n$ puis $C_n \leftarrow C_n - \frac{a}{1-a} \sum_{j=1}^{n-1} C_j$.

Solution : $\text{rg}(A) = 1$ si $a = 1$, $\text{rg}(A) = n - 1$ si $a = -\frac{1}{n-1}$ et $\text{rg}(A) = n$ sinon.

Exercice 13: (★★★)

Si f est un endomorphisme de rang 1, utiliser u tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u)$.

Solution : Les matrices carrées de rang 1 sont les matrices de la forme XY^T où $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. La puissance k de M matrices carrées de rang 1 est de la forme $\alpha^{k-1}M$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.

III Changements de bases

Exercice 14:

Passer par la base canonique.

Solution : $\begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 15: (★)

Se placer dans une base formée de vecteurs de $\ker p$ et $\text{Im } p$ puis utiliser les formules de changement de base.

Solution : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 16: (★)

1. Utiliser les degrés des polynômes.

2. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *Solution :* $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 17: (★)

1. Montrer que \mathcal{B} est libre.

2. *Solution :* $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. *Solution :* $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. En calculant B^2 , remarquer que $B^4 = I_3$.
Solution : $A^{4n} = I_3$.

Exercice 18: (★★)

1. (a) Utiliser le lien entre $f(x)$ et AX .

Solution : $f(x, y, z) = (12x + 6y, -20x - 10y, -6x - 3y - z)$

(b) *Solution :* $((1, -2, 0))$ est une base de $\text{Ker } f$ et $((6, -10, -3), (0, 0, -1))$ est une base de $\text{Im } f$.

(c) Remarquer que $\text{Ker } f \neq \{0\}$.

Solution : A n'est pas inversible.

2. (a) Montrer que \mathcal{C} est libre et utiliser la dimension.

(b) Déterminer P en utilisant la définition d'une matrice de passage et remarquer que $Q = P^{-1}$.

$$\text{Solution} : P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1 , e_2 et e_3 .

$$\text{Solution} : D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Utiliser la formule de changement de base.

$$(e) \text{ Solution} : A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n & 0 \\ -5 \cdot 2^{n+1} & -5 \cdot 2^n & 0 \\ -2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n & -2^n + (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

(f) *Solution* : $f^n(x, y, z) = (3 \cdot 2^{n+1}x + 3 \cdot 2^n y, -5 \cdot 2^{n+1}x - 5 \cdot 2^n y, (-2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n)x + (-2^n + (-1)^n)y + (-1)^n z)$

Exercice 19 : (★★) ✎

1. Expliciter les noyaux.

Solution : $((1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(u - id_E)$, $((4, 3, -2))$ est une base de $\text{Ker}(u - 2id_E)$,

$((2, -3, 2))$ est une base de $\text{Ker}(u + 4id_E)$.

2. Montrer que la famille est libre et utiliser la dimension.

3. Exprimer les images de e_1, e_2, e_3 en fonction de e_1, e_2, e_3 puis utiliser les formules de changement de base.

$$\text{Solution} : D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 : (★★) ✎

Si $\text{rg}(A) = r$, utiliser les formules de changement de base pour l'application linéaire f canoniquement associée à A en prenant comme base de \mathbb{K}^p : (e_1, \dots, e_p) avec (e_{r+1}, \dots, e_p) base de $\text{ker } f$ et comme base de \mathbb{K}^n : $(f(e_1), \dots, f(e_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$.

Exercice 21 : (★★) ✎

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . Chercher une base de l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ puis, si $f(x_0) = x_0$, résoudre $f(x) = x_0 + x$. Pour le calcul de puissances, utiliser les formules de changement de base et la formule du binôme de Newton.

$$\text{Solution} : A^n = \begin{pmatrix} n-1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$