Indications du chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

I Bases des mathématiques

Exercice 1 : ($\star$)
Remarquer que $2n^2 - n - 6 = (n+3)(2n-7) + 15$.
Solution : $n \in \{0, 2, 12\}$

II Quantificateurs

Exercice 2 :

1. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : Faux
2. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : Faux
3. Raisonner par l'absurde.
   Solution : Faux
4. Exhiber une valeur de x et de y qui convient.
   Solution : Vrai
5. Pour y quelconque, exhiber une valeur de x qui convient.
   Solution : Vrai

Exercice 3 :

1. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : Faux
2. Exhiber une valeur de x qui convient.
   Solution : Vrai
3. Pour x quelconque, exhiber une valeur de y qui convient.
   Solution : Vrai
4. Montrer la négation.
   Solution : Faux

Exercice 4 : ($\star$)

- On montre que $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  En particulier, pour $y = \dots$ et $z = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant d'autres valeurs de y et z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $y = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $z = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant une autre valeur de z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $z = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $y = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant une autre valeur de y afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est vrai.
  Soit $y \in \mathbb{R}^*$, soit $z \in \mathbb{R}^*$, posons $x = \dots$.
  Vérifier que x convient.

Solution :
$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: vrai*

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$. Posons $m = \sqrt{n^2+1}$.
Calculer $m^2 - n^2$ pour montrer que $(m-n)(m+n) = 1$.
Comme $m - n \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$, la seule solution possible est $m - n = m + n = 1$.
Résoudre ces équations, et arriver à la contradiction que m ou n n'est pas entier.

Exercice 6 : ($\star$)
Raisonner par l'absurde et utiliser une combinaison linéaire.

III Généralités sur les suites et les fonctions

Exercice 7 : (⋆)

1. *Solution :* f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ et est impaire.
2. *Solution :* f est définie sur $]1,+\infty[$ et n'est ni paire ni impaire.
3. *Solution :* f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire.

Exercice 8 :
Utiliser les définitions.

IV Logique

Exercice 9 : (⋆)
Remarquer que $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$.

Exercice 10 : (⋆)
Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 11 : (⋆)
Raisonner par l'absurde.

Exercice 12 : (⋆)
Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 13 : (⋆)
Raisonner par contraposée et utiliser la définition de $\mathbb{Q}$.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Raisonner par l'absurde et utiliser que : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $x_j\leq\max(x_1,\dots,x_n)$ et sommer ces inégalités.

Exercice 15 : (⋆⋆)

1. (a) Faire le cas où n est pair et le cas où n est impair.
   (b) *Solution :* $\exists k\in\mathbb{N}$, $n=8k$
2. (a) *Solution : "si l'entier n est impair alors n^2-1 est pas divisible par 8".*
   (b) Factoriser n^2-1 et utiliser 1.a
   (c) *Solution : P est vraie*

Exercice 16 : (⋆⋆)
Raisonner par double implication. Pour $\Rightarrow$, on pourra raisonner par l'absurde.

V Monotonie

Exercice 17 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ en utilisant l'expression conjuguée. On se ramène à l'étude du signe d'un polynôme de degré 2.

Exercice 18 : (⋆⋆)
Raisonner par l'absurde pour montrer une des deux implications.

Exercice 19 : (⋆⋆)
On raisonne par l'absurde. Supposons que f ne soit pas strictement décroissante (et pas que f est croissante), c'est-à-dire, en écrivant la négation de la proposition logique, qu'il existe $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $x_1<x_2$ et $f(x_1)\leq f(x_2)$.
En utilisant les deux hypothèses, montrer que $f\circ f\circ f(x_1)\leq f\circ f\circ f(x_2)$ et que $f\circ f\circ f(x_1)>f\circ f\circ f(x_2)$ ce qui donne une contradiction.

VI Systèmes linéaires

Exercice 20 :
Solution : $\{(-8+11z,5-7z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Exercice 21 :
Solution : $\{(2-a,-5+3a+z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $a+b=3$, $\emptyset$ *sinon.*

Exercice 22 :
Solution : $\left\{(-\frac{m-1}{m}y+\frac{m+2}{m},y),\ y\in\mathbb{R}\right\}$ *si* $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\{(3,-2)\}$ *sinon.*

Exercice 23 : (⋆)
Solution : $\{\left(-\frac{2}{m-1},\frac{3m}{m-1},-\frac{1}{m-1}\right)\}$ *si* $m\neq 1$ *et* $m\neq-\frac{3}{2}$
$\{(2z,1+2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=-\frac{3}{2}$
$\emptyset$ *si* $m=1$.

Exercice 24 : (⋆)
Solution : $\{\left(m,1,\frac{1}{m}\right)\}$ *si* $m\notin\{0,1,-1\}$
$\{(1,z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=1$
$\{(-1,-z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=-1$
$\emptyset$ *si* $m=0$.

VII Principe de récurrence

Exercice 25 :
Raisonner par récurrence.

Exercice 26 :
Raisonner par récurrence en remarquant que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = (7+2).3^{2n} - 2.2^n$.

Exercice 27 :
Raisonner par récurrence en remarquant que $7^{n+1} - 1 = (6+1).7^n - 1$.

Exercice 28 : (⋆⋆)

1. Raisonner par récurrence en remarquant que $2^{2^{n+1}} - 6 = ((2^{2^n} - 6) + 6)^2 - 6$.
2. Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.

VIII Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques

Exercice 29 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Solution : (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.
3. *Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{3}{2}n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2+3n}$.*

Exercice 30 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence et étudier le signe de $u_{n+1} - 2$.
2. *Solution : (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.*
3. *Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^{n-2} - 2.3^{n-1}}{2^{n-2} - 3^{n-1}}$.*

Exercice 31 :
Etudier la suite $(u_n - 3)$.
Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - \dfrac{1}{3^{n-1}}$

Exercice 32 :
Etudier la suite $(u_n - 2)$.
Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - (-1)^n$

Exercice 33 : (⋆)
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et remarquer que (v_n) est arithmético-géométrique.
Solution : $v_n = 3.2^n - 1$ et $u_n = 3.2^n - 1 + n$.

IX Fonctions périodiques

Exercice 34 : (⋆) On peut montrer que f et g sont $T_1 T_2$ périodique puis que $f + g$ est $T_1 T_2$ périodique.

X Autres principes de récurrence

Exercice 35 :
Raisonner par récurrence à deux niveaux.

Exercice 36 :
Raisonner par récurrence à trois niveaux.

Exercice 37 : (⋆)
Montrer par récurrence à deux niveaux que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

Exercice 38 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence à deux niveaux. On pourra remarquer que :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Exercice 39 : (⋆)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 40 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 41 : (⋆ ⋆ ⋆)
Raisonner par récurrence forte en traitant les cas où $n+1$ est pair et $n+1$ est impair.

XI Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 42 :
Utiliser l'équation caractéristique.
Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1+17n}{2^n}$.

Exercice 43 : (⋆)
Solution : $u_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + 2u_1) + \dfrac{2(u_0 - u_1)}{3(-2)^n}$

XII Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 44 : (⋆)
Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g pour en déduire celle de h.
Solution : $g : x \mapsto f(0)$ *et* $h : x \mapsto f(x) - f(0)$

Exercice 45 : (⋆⋆)
Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g en intégrant la relation $f = g + h$, pour en déduire celle de h.
Solution : $g : x \mapsto 2x.\int_0^1 f$ *et* $h : x \mapsto f(x) - 2x.\int_0^1 f$

Exercice 46 : (⋆⋆)
Analyse :
Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant g la fonction constante égale à x, montrer que $f(x) = x$.
Synthèse :
Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Montrer que f convient, c'est à dire que pour toute fonction g (et pas seulement pour g constante), $f \circ g = g \circ f$.
Solution : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

Exercice 47 : (⋆⋆)
Raisonner par analyse-synthèse. Pour l'analyse : choisir des valeurs particulières de x dans la relation : $f(x) = ax + b$. Pour la synthèse, choisir des valeurs particulières de x, y et z dans la relation $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$.