Indications du chapitre 18 : Intégration

I Révisions de calcul intégral

Exercice 1 :

1. Effectuer une intégration par parties.
   Solution : $2e-8e^{-1}$
2. Effectuer une intégration par parties.
   Solution : $\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}$
3. Effectuer le changement de variable $u=\frac{t}{2}$.
   Solution : $\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 2 :

1. Effectuer une intégration par parties.
   Solution : $2(\ln(2))^2-4\ln(2)+2$
2. Effectuer le changement de variable $t=\sin u$.
   Solution : $\frac{\pi}{2}$
3. Effectuer le changement de variable $u=\ln(t)$.
   Solution : $\frac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}dx$ Solution : $\frac{\ln(2)}{2}$

Exercice 3 :

1. Effecuer une intégration par parties pour le calcul de u_1 et de u_n.
   Solution : $u_0=e-1$, $u_1=e-2$
2. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0 et que $u_n\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^x\,dx$.
   Solution : $\lim u_n=0$
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=u_0-u_n$.

Exercice 4 :

Effectuer le changement de variable $t=\frac{1}{x}$.
Solution : $\frac{\pi}{12}$

Exercice 5 :

Effectuer le changement de variable $x=\tan(t)$ et linéariser l'expression obtenue.
Solution : $\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}$

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 6 :

Solution : $\int_{-1}^{2} x|x|dx=\frac{7}{3}$, $\int_{-1}^{1} x|x|dx=0$

Exercice 7 :

Utiliser, pour $x>1$ et pour $t\in[x,x^3]$, $\ln t\leq\ln(x^3)$ pour minorer l'intégrale.
Solution : $+\infty$

Exercice 8 : (★★)

Montrer, par encadrements, que $\lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt=0$.
Solution : $\ln 3$

Exercice 9 : (★★)

- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
- Justifier l'existence de $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=M$.
- Soit $\varepsilon>0$, montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[\cap[a,b],\ f(x)\geq M-\varepsilon.$$

- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\geq(M-\varepsilon)(2\eta)^{\frac{1}{n}}$.
- Conclure en utilisant la définition de la limite.

Exercice 10 : (★★)

Utiliser la relation de Chasles pour obtenir une somme de deux intégrales dont une est une intégrale sur un voisinage de $+\infty$.

Exercice 11 : (★)

Poser, après avoir justifié son existence, $M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Montrer alors, en utilisant des inégalités que, pour tout $x\in[0,1]$, $|g(x)|\leq Mx$ puis que $|f(x)|\leq\frac{M}{2}$. En déduire que $M=0$.

Exercice 12 : (⋆⋆)
Supposer que f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et, en utilisant $\int_0^1 f = 0$, obtenir une contradiction.
Supposer que f s'annule en un unique point $\alpha \in]0,1[$ et, en utilisant $g : t \mapsto (t-\alpha)f(t)$ et les hypothèses, obtenir une contradiction. Ne pas oublier le cas où f s'annule sans changer de signe.

Exercice 13 : (⋆)
Après avoir calculé $\int_0^1 (f^2-f)^2$, montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in \{0,1\}$. Utiliser un argument de continuité pour en déduire que f est constante.
Solution : $\int_0^1 (f^2-f)^2 = 0$, les fonctions vérifiant la relation sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1.

Exercice 14 : (⋆⋆)

- Supposer que f admet exactement j zéros, $\lambda_1 < \cdots < \lambda_j$ **avec changement de signe** et $j \leq n$.
- En faisant un tableau de signe, montrer que $x \mapsto f(x).\prod_{k=1}^{j}(x-\lambda_k)$ est de signe constant.
- En remarquant que $x \mapsto \prod_{k=1}^{j}(x-\lambda_k)$ est polynomiale de degré $j \leq n$, montrer que :

$$\int_a^b f(x).\prod_{k=1}^{j}(x-\lambda_k)\,dx = 0.$$

- En déduire que f est nulle.

Exercice 15 : (⋆⋆)

1. Utiliser f bornée et atteint ses bornes et le théorème des valeurs intermédiaires.
2. (a) Solution : $\frac{1}{2}f(0)$
   (b) Solution : $\ln 2.f(0)$

III Sommes de Riemann

Exercice 16 :
Reconnaître une somme de Riemann.
Solution : $\ln 2$

Exercice 17 :

1. Solution : $\frac{\pi}{4}$
2. Solution : $\frac{1}{2}\ln 2$
3. Solution : $\frac{1}{\ln 2}$

Exercice 18 : (⋆)

1. Solution : $\frac{4}{e}$
2. Solution : $\frac{4}{e}$

Exercice 19 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}.$$

En utilisant les sommes de Riemann, en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx.$$

Effectuer le changement de variable $x = \cos^2 t$.
En déduire que :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt.$$

Utiliser des formules de trigonométrie pour avoir :

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(4t))\,dt.$$

Solution : $\frac{\pi}{8}$

IV Lien entre intégrale et primitive

Exercice 20 : (⋆)
Utiliser la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

Exercice 21 : (⋆⋆)
Etudier la fonction $F : x \mapsto e^{-kx}\int_0^x f(t)\,dt$.

Exercice 22 : (⋆)

1. En utilisant la relation de Chasles, écrire F comme la somme d'une intégrale de 0 à x et d'une intégrale de x à 1. En déduire que F est dérivable et calculer F'.
   Montrer que F' est dérivable et calculer F''.
   Montrer que F'' est continue.
2. Montrer que $F'(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et remarquer que $F(x) - F(0) = \int_0^x F'(u)\,du$.
   Solution : $F'(x) = \int_x^1 f(t)dt$

Exercice 23 : (⋆⋆⋆)
Poser $\varphi : x \mapsto \int_0^x fg$, prouver et intégrer l'inéquation : $\dfrac{\varphi'}{C+\varphi} \leq g$.

V Inégalité de Taylor-Lagrange

Exercice 24 :
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exp entre 0 et x.

Exercice 25 : **($\star$)**
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 pour la minoration et à l'ordre 3 pour la majoration.

Exercice 26 : **($\star\star$)**
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et a puis entre x et $-a$.