Indications du chapitre 17 : Espaces vectoriels

I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 :

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Solution : E est un espace vectoriel
2. Exhiber un contre-exemple de somme de deux éléments de F qui n'est pas dans F.
   Solution : F n'est pas un espace vectoriel
3. Prouver que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Solution : G est un espace vectoriel
4. Prouver que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Solution : H est un espace vectoriel

Exercice 2 :

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Solution : E est un espace vectoriel
2. Prouver que F est une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   Solution : F est un espace vectoriel
3. Exhiber un contre-exemple de somme de deux éléments de G qui n'est pas dans G.
   Solution : G n'est pas un espace vectoriel
4. Prouver que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Solution : H est un espace vectoriel

Exercice 3 : $(\star)$

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$.
3. Montrer que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : $(\star)$

1. *Solution :* $E \cap F = \{0\}$.
2. Pour l'inclusion réciproque, partir de $(x,y,z) \in E$ et résoudre le système d'inconnues λ et μ : $(x,y,z) = \lambda u + \mu v$.
   Solution : $\mathrm{Vect}(u,v) = E$.

Exercice 5 : $(\star\star)$

1. *Solution :* $(F\cap G)+(F\cap H) \subset F\cap(G+H)$
2. *Solution :* $F+(G\cap H) \subset (F+G)\cap(F+H)$

Raisonner par double inclusion.

Exercice 6 :

Prouver l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 7 : $(\star\star)$

1. On peut raisonner par double inclusion et se ramener à la résolution d'un système.
2. Montrer l'existence et l'unicité de la décomposition.

Exercice 8 : $(\star\star)$

1. (a) Choisir $x \notin E_1$ et prouver qu'il convient.
   (b) Choisir $x \notin E_2$ et prouver qu'il convient.
2. (a) Choisir $x \notin E_3$ et $y \notin \mathrm{Vect}\{(1,2,2),x\}$ et prouver qu'ils conviennent.
   (b) Choisir $x \notin E_4$ et $y \notin \mathrm{Vect}\{(1,0,1),x\}$ et prouver qu'ils conviennent.

Exercice 9 : $(\star\star)$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 10 : $(\star\star)$

Montrer d'abord que F et G sont des sous espaces vectoriels de E puis utiliser la définition d'espaces supplémentaires en raisonnant par analyse/synthèse.

Exercice 11 : $(\star\star\star)$

1. Utiliser la définition.
2. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. On pose $f_i : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{j\neq i}(x-a_j)$. Montrer que $\mathrm{Vect}\{f_i,\ i\in[\![1,p]\!]\}$ est un supplémentaire de F dans E.

II Familles finies de vecteurs

Exercice 12 :

1. *Solution : Libre*
2. *Solution : Libre*
3. *Solution : Liée*
4. *Solution : Liée*

Exercice 13 :
Utiliser la définition d'une famille libre et prendre des valeurs particulières de x bien choisies.

Exercice 14 : ($\star$)
Exprimer a, b, c en fonction de u, v, w pour prouver l'implication réciproque.

Exercice 15 : ($\star$)

1. Prendre des valeurs bien choisies de x.
Solution : La famille est libre.
2. Exhiber une combinaison linéaire nulle en utilisant les formules de trigonométrie.
Solution : La famille est liée.

Exercice 16 : ($\star$)
Partir d'une combinaison linéaire nulle et choisir des valeurs particulières de n.

Exercice 17 : ($\star\star$)

1. On peut supposer, quitte à les réordonner, que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.
Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{i=1}^n \mu_i f_i = 0$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i x} = 0$.
Factoriser cette expression par $e^{\lambda_n x}$ puis faire tendre x vers $+\infty$, en remarquant que si $i \neq n$, $\lim_{x\to+\infty} e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0$. En déduire que $\mu_n = 0$.
En réitérant, on a $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. Conclure.
Solution : La famille est libre.
2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) = 0$.
Soit $m \in \mathbb{N}$, en dérivant m fois la relation précédente et en factorisant par n^m, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{k}{n}\right)^m \sin^{(m)}(kx) = 0.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$, faire tendre m vers $+\infty$ en remarquant que, pour tout k, $(\sin^{(m)}(kx))_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée.
En déduire que $\lambda_n = 0$ et conclure en réitérant. *Solution : La famille est libre.*

Exercice 18 : ($\star\star$)

- Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On a :
$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i (u + e_i) = \cdots = \sum_{k=1}^n \left(\mu_k + \lambda_k \sum_{i=1}^n \mu_i\right) e_k.$$
- Supposons que $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ soit liée. Alors il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$ donc comme $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre, on a, pour tout k, $\mu_k + \lambda_k \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. Conclure en sommant les relations précédentes.
- Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$, poser $\mu_k = \lambda_k$ et montrer que $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et que $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$. Conclure.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 20 :
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Chercher deux vecteurs qui engendrent E et prouver qu'ils forment une famille libre.

Exercice 21 : ($\star$)
Remarquer que les $P \in \mathbb{R}_3[X]$, tels que $P(1) = P(2) = 0$ sont de la forme : $P = (X-1)(X-2)(aX+b)$ et faire apparaître une famille génératrice de E.
Solution : $((X-1)(X-2)X, (X-1)(X-2))$

Exercice 22 : ($\star$)

1. Résoudre le système formé par les deux équations.
Solution :$((-5,1,3))$
2. Exprimer t en fonction de x, y, z par exemple.
Solution :$((1,0,0,1), (0,1,0,3), (0,0,1,-1))$
3. En raisonnant par coefficients indéterminés, montrer que les éléments de F_3 sont de la forme : $a(X^3-1)$.
Solution :(X^3-1)

Exercice 23 :
Pour la base, chercher la forme factorisée des éléments de E.
Solution : $\big((X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, (X-a)(X-b)X^2\big)$ *est une base de* E.

III Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 24 :

1. *Solution : Base :* $((1,0,1),(3,1,0))$*, dimension 2*
2. *Solution : Base :* $((3,1,-4))$*, dimension 1*
3. *Solution : Base :* (X,X^2)*, dimension 2*
4. *Solution : Base :* $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$*, dimension 3*
5. *Solution : Base :* $(Id_{\mathbb{R}}, x \mapsto e^x)$*, dimension 2*

Exercice 25 :

1. *Solution : Base :* $((2,1,0),(-3,0,1))$*, dimension 2*
2. *Solution : Base :* $((6,3,2))$*, dimension 1*
3. *Solution : Base :* $((1,-1,1,-1))$*, dimension 1*
4. *Solution : Base :* $(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1)$*, dimension 4*

Exercice 26 : (⋆)
Solution : $\left(\left(-\frac{1+i}{2}, 1, \frac{i-1}{2}\right)\right)$ *est une base de* F *et* $\dim F = 1$.

Exercice 27 : (⋆)
Compléter avec deux vecteurs bien choisis.

Exercice 28 :
Se ramener à une famille libre.

1. *Solution : 2*
2. *Solution : 2*
3. *Solution : 3*

Exercice 29 :
Se ramener à une famille libre.

1. *Solution : 4*
2. *Solution : 3*

Exercice 30 : (⋆)

1. Remarquer que la famille est de degrés échelonnés.
   Solution : 3
2. Montrer que la famille est libre en faisant des évaluations en 1 et des simplifications.
   Solution : n+1

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 31 :
Remarquer qu'un supplémentaire est de dimension 1.
Soution :Vect(X^2)

Exercice 32 : (⋆)
Remarquer que $\mathrm{rg}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{F}'))$.

Exercice 33 : (⋆)
Montrer que les familles (u,v,w) et (x,y) sont libres.
Remarquer que $\dim(F+G) = \mathrm{rg}(u,v,w,x,y)$.
Solution : $\dim F = 3$, $\dim G = 2$, $\dim F \cap G = 1$.

Exercice 34 : (⋆⋆)
Comme $\{e_1,\dots,e_n\} = \{e_1,\dots,e_r\} \cup \{e_{r+1},\dots,e_n\}$, remarquer que : $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r) + \mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n)$.
Or $\dim \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = \mathrm{rg}(e_1,\dots,e_n) = s$ et :
$\dim(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r) + \mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n)) \leq \dim(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)) + \dim(\mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n))$.
Justifier que $\dim \mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n) \leq n-r$ pour conclure.

Exercice 35 : (⋆⋆)

1. Raisonner par analyse-synthèse.
   Solution : $\forall (x_n) \in E, \exists!((u_n),(v_n)) \in F \times G, (x_n) = (u_n) + (v_n)$ *avec :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)$ *et* $v_n = \frac{1}{4}(-x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n)$.
2. Utiliser la formule de Grassmann et les résultats sur les suites.
   Solution : $\dim E = 3$