Indications du chapitre 16 : Analyse asymptotique

I Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 1 :

1. *Solution :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$
2. *Solution :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$
3. *Solution :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$
4. Utiliser les formules de conversion de sommes en produits.
   Solution : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{a^2-b^2}{2}x^2$

Exercice 2 : ($\star$)

1. Factoriser par $e^{x\ln a}$.
2. Remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1} - \pi\right)$.
3. Utiliser la quantité conjuguée.
4. Mettre au même dénominateur et utiliser la quantité conjuguée.

Solution :

1. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\dfrac{a}{b}$
2. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2\pi x$
3. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
4. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{3x}{2\sqrt{2}}$

Exercice 3 : ($\star$)

1. Remarquer que $\tan x = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)}$ et $\tan(2x) = \tan(2x-\pi)$.
2. Remarquer que $\tan \pi x = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\pi x)}$ et $2x^2-3x+1 = (x-\frac{1}{2})(2x-2)$.
3. Remarquer que $\ln(\cos(ax)) = \ln(1+(\cos(ax)-1))$.
4. Remarquer que $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1))$.

Solution :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x = -2$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan \pi x = \frac{1}{\pi}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x} = -\frac{1}{4}$

Exercice 4 : ($\star$)

1. *Solution :* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x \ln(1+\ln(1+x)) = 0$
2. *Solution :* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x} = e$
3. *Solution :* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x^x-1} = 1$

Exercice 5 : ($\star$)

1. *Solution :* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^{\cos x-1}-1) = -\frac{1}{2}$
2. *Solution :* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) = -2$

Exercice 6 : ($\star\star$)

Etudier le comportement des quotients.

1. *Solution :* $\ln(1+2x) = o(x\ln x)$
2. *Solution :* $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2) = O(x\ln x)$
3. *Solution :* $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = o(\frac{1}{x+1})$
4. *Solution :* $\ln x = o(x^{-1/x})$

II Développements limités

Exercice 7 :

1. Poser $h = x - \frac{\pi}{3}$.
   Solution : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$
2. Poser $h = x - e$.
   Solution : $1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-e)^4 + o((x-e)^4)$

3. Poser $h = x-1$.
   Solution : $e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$
4. Poser $h = x-2$.
   Solution : $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + o((x-2)^4)$

Exercice 8 :

1. *Solution :* $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$
2. *Solution :* $x^2 + x^3 + \dfrac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

Exercice 9 : (⋆)

1. *Solution :* $x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$
2. *Solution :* $(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 - \frac{25}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$
3. *Solution :* $1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)$
4. *Solution :* $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + o(x^6)$

Exercice 10 :

1. *Solution :* $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
2. *Solution :* $e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6}\right) + o(x^4)$

Exercice 11 :

1. *Solution :* $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$
2. *Solution :* $-2x^2 - x^3 + o(x^3)$

Exercice 12 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) + o(x^3)$
2. *Solution :* $1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$

Exercice 13 : (⋆)

1. *Solution :* $x^2 - x^3 + o(x^3)$
2. *Solution :* $e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}) + o(x^5)$
3. *Solution :* $1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$
4. *Solution :* $\ln 3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$

Exercice 14 : (⋆⋆)

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$.

Donc : $\displaystyle\ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln\left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right)$.

Factoriser le terme à l'intérieur du logarithme par e^x et remarquer que si $g(x) = o\left(\frac{x^{n+1}}{e^x}\right)$, alors $g(x) = o(x^{n+1})$.

Solution : $x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$

Exercice 15 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$
2. *Solution :* $2 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$

Exercice 16 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 + o(x^3)$
2. *Solution :* $e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}) + o(x^2)$

Exercice 17 : (⋆)

Calculer le développement limité de F', où $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, à un ordre bien choisi.

Solution : $x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{1}{40}x^{10} + o(x^{13})$

Exercice 18 : (⋆⋆)

Déterminer le développement limité de la dérivée de $h \mapsto f\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$

Solution : $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{3\sqrt{3}}{16}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{3}{16}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)$

III Applications des développements limités

Exercice 19 :

1. *Solution :* $\frac{1}{6}$
2. *Solution :* -1

Exercice 20 : (⋆)

1. *Solution :* $\frac{1}{3}$
2. *Solution :* $-\frac{e}{2}$
3. *Solution :* $-\frac{1}{2}$

Exercice 21 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $e^{1/3}$
2. Poser $t = \frac{1}{x}$ et utiliser les équivalents pour se ramener à une limite connue.
   Solution : 1
3. *Solution :* $\frac{1}{8}$

Exercice 22 :
Calculer les dévelopements limités de f et de f' à un ordre bien choisi.

Exercice 23 :
Solution : La tangente a pour équation $y = x + \ln 2$, au voisinage de 0^+ (resp. 0^-), la courbe est en dessous (resp. au dessus) de sa tangente.

Exercice 24 :
Solution : La courbe a pour asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ (resp. $y = -x - \frac{1}{2}$), au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), la courbe est au dessus (resp. au dessus) de son asymptote.

Exercice 25 : ($\star$)
Solution : La courbe admet une asymptote d'équation $y = x + 2$ et la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

IV Relations de comparaison : cas de suites

Exercice 26 :
1. *Solution :* $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. *Solution :* $x_n \sim \frac{2}{n^2}$
3. *Solution :* $x_n \sim \frac{1}{n}$
4. Utiliser la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$.
   Solution : $x_n \sim \frac{\ln n}{n}$
5. *Solution :* $x_n \sim \frac{1}{n}$
6. Calculer la limite de (x_n).
   Solution : $x_n \sim \sqrt{3}$
7. Calculer la limite de (x_n).
   Solution : $x_n \sim (\sqrt{3})^{\pi}$

Exercice 27 : ($\star\star$)
1. Majorer, à partir d'un certain rang le quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ par une constante bien choisie et utiliser des inégalités géométriques.
2. Utiliser le résultat de la première question.
3. Utiliser le résultat de la première question.

Exercice 28 :
1. Remarquer que $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \sin \dfrac{1}{n^2} = +\infty$
2. Remarquer que $\left(n^{1/n^2} - 1\right) = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2}$.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{1/n^2} - 1\right) = 0$
3. Remarquer que $\ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{n}$.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}} = 1$

Exercice 29 :
1. *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$
2. *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}$
3. *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n = e^x$
4. *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)^n = e^8$

V Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice 30 : ($\star\star$)
Utiliser l'imparité de f^{-1} et la composition des développements limités pour la relation $x = f^{-1}(xe^{x^2})$.
Solution : $x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$

Exercice 31 : ($\star$)
1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + nx$.
2. Utiliser la croissance de $x \mapsto x^3 + nx$.
3. Remarquer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^3}{n}$ et que $x_n = o(1)$ donc $x_n^3 = o(1)$.
4. Montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$ et en déduire que $x_n^3 = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 32 : ($\star$)
1. Raisonner par récurrence.
   Solution : $\lim u_n = 1$

2. Remarquer que $u_n = 1 + o(1)$ et réinjecter dans la définition.
3. Réinjecter le résultat précédent dans la définition.
4. Réinjecter le résultat précédent dans la définition.

Exercice 33 : (⋆⋆)

1. Montrer l'application $x \mapsto \tan x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ est continue, strictement croissante sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et calculer ses limites.
2.
   - On a : $\tan x_n = \frac{\operatorname{sh}(x_n)}{\operatorname{ch}(x_n)}$ et donc : $\tan(x_n - n\pi) = \frac{\operatorname{sh}(x_n)}{\operatorname{ch}(x_n)}$. Montrer que $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que $x_n - n\pi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n}\right)$.
   - Montrer que $\lim x_n = +\infty$ puis que $\lim \frac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n} = 1$, en déduire que $\lim x_n - n\pi = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.
   - Montrer que : $\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(1) \sim_{x \to 1} \frac{1}{2}(x-1)$.

     En déduire que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{4} \sim \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n} - 1)$.

     Montrer que : $\frac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n} - 1 = \frac{-2e^{-x_n}}{e^{x_n} + e^{-x_n}} = \frac{-2e^{-2x_n}}{1 + e^{-2x_n}}$ puis que $\frac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n} - 1 \sim -2e^{-2x_n}$.

     En déduire que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{4} \sim -e^{-2x_n}$.

     Conclure en utilisant $\lim(x_n - (n\pi + \frac{\pi}{4})) = 0$.

   Solution : $l = \frac{\pi}{4}$, $x_n - n\pi - l \sim -e^{-2(n\pi + \frac{\pi}{4})}$

Exercice 34 : (⋆ ⋆ ⋆)

Etudier la fonction $x \mapsto x - \ln x$.

Montrer que (u_n) est croissante et non majorée (on peut raisonner par l'absurde).

Montrer ensuite que $u_n \sim n$ puis que $u_n - n \sim \ln n$.

Justifier et simplifier alors la relation : $u_n - n = \ln(n + \ln n + o(\ln n))$.

Exercice 35 : (⋆⋆) On pose :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Effectuer une intégration par parties.
3. Remarquer que $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$ et que $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1}$.
4. Traduire les limites en termes d'équivalents puis de développement asymptotique.