Indications du chapitre 13 : Limites et continuité

I Limite d'une fonction en un point

Exercice 1 :

1. Factoriser par le terme dominant.
   Solution : $\frac{1}{5}$
2. Utiliser la quantité conjuguée.
   Solution : 1
3. Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
   Solution : 5
4. Factoriser par le terme dominant.
   Solution : $+\infty$
5. Transformer la puissance en exponentielles.
   Solution : e^2

Exercice 2 :

1. *Solution :* $+\infty$
2. Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
   Solution : $-\frac{2}{3}$
3. Utiliser les limites en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ et de $\frac{1-\cos x}{x^2}$.
   Solution : $\frac{1}{2}$
4. Etudier les limites en 0^+ et en 0^-.
   Solution : La limite n'existe pas.
5. Factoriser et utiliser un taux d'accroissement.
   Solution : $\frac{\sin a \cos a}{a}$

Exercice 3 : $(\star)$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_0+nT) = +\infty$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0+nT) = a$. En déduire que $f(x_0) = a$.

Exercice 4 : $(\star\star)$
Appliquer la caractérisation séquentielle de la limite à la suite : $x_n = \frac{1}{2n}$ pour montrer que f n'a pas de limite finie en 0 puis à la suite $y_n = \frac{1}{2n+1}$ pour montrer que f n'a pas de limite en 0. *Solution : f n'admet pas de limite en* 0.

Exercice 5 :

1. Calculer les limites à gauche et à droite en utilisant le théorème d'encadrement.
   Solution : 1
2. Remarquer que, au voisinage de 2, f est nulle.
   Solution : 0
3. Calculer les limites à gauche et à droite.
   Solution : f n'a pas de limite en $\frac{1}{2}$.
4. Remarquer que, au voisinage de $\dfrac{2}{3}$, $f(x) = x$.
   Solution : $\dfrac{2}{3}$
5. Remarquer que, au voisinage de $+\infty$, f est nulle.
   Solution : 0

Exercice 6 :
Utiliser des encadrements.
Solution : 0

Exercice 7 : $(\star)$

1. Remarquer que cos est bornée.
   Solution : $\lim_a f = 0$
2. Trouver deux suites tendant vers 0 telles que l'image par f de ces suites n'ait pas la même limite.
   Solution : f n'a pas de limite en a.
3. Raisonner par minoration.
   Solution : $\lim_a f = +\infty$
4. Calculer les limites en a^+ et a^-.
   Solution : f n'a pas de limite en a.

II Continuité en un point

Exercice 8 :

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. f est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. f est clairement continue sur $\mathbb{R}*$. Etudier la limite en 0.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. f est clairement continue sur $\mathbb{R}*$. Pour étudier la limite en 0, remarquer que $\frac{e^{arctan x}-1}{x} = \frac{e^{arctan x}-1}{\text{Arctan}\, x}.\frac{\text{Arctan}\, x}{x}$ et utiliser des taux d'accroissement.
   Solution : f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : ($\star$)

1. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 *avec* $f(0) = 1$.
2. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
3. Etudier la limite en 0^+ et en 0^-.
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
4. Calculer la limite en 0 en utilisant l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 *avec* $f(0) = e$.
5. Utiliser le fait que cos n'a pas de limite en $+\infty$
   Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
6. Remarquer que cos est borné.
   Solution : f est prolongeable par continuité en 0 *avec* $f(0) = 0$.

Exercice 10 : ($\star$)
Raisonner par analyse-synthèse et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
Solution : Les applications constantes.

Exercice 11 : ($\star\star$)

1. Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
2. (a) Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
   (b) Trouver un contre-exemple. On peut prendre : $f(x) = |x-\sqrt{2}|$ et $g(x) = 2|x-\sqrt{2}|$.

III Continuité sur un intervalle

Exercice 12 :
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto x^{17} - x^{11} - 1$.

Exercice 13 : ($\star$)
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.

Exercice 14 : ($\star$)
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(a) - 2f(x) + f(b)$.

Exercice 15 : ($\star$)
Raisonner par analyse-synthèse et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ou 1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.
Solution : $f = 0$ ou $f = 1$

Exercice 16 : ($\star$)
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x)$.

Exercice 17 : ($\star\star$)
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 18 : ($\star\star$)
Posons $g : \begin{array}{ccc} [0,1-\frac{1}{n}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) \end{array}$. Supposons que g ne s'annule pas. En déduire, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que g est de signe constant.
Supposons, par exemple, $g > 0$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$. Donc : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0)$ puis en déduire une contradiction.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Raisonner par l'absurde pour se ramener au cas $g - f > 0$.
Montrer que f admet un point fixe x puis, en posant $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, montrer que, pour tout n, u_n est un point fixe de f.
Montrer que (u_n) converge et faire un passage à la limite.

Exercice 20 : ($\star\star$)
Supposer f non monotone. En choisissant bien a, b, x, y, utiliser la fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$.

Exercice 21 : ($\star$)
Pour $f \circ g$ bornée, utiliser la définition d'une bornée.
Pour $g \circ f$ se ramener à l'étude de g sur un segment.

Exercice 22 : ($\star\star$)
Utiliser la définition de la limite afin de restreindre l'ensemble $\mathbb{R}^{+*}$ pour se ramener à un segment.

Exercice 23 : ($\star$)
Remarquer que f est bornée au voisinage de $\pm\infty$ puis se ramener à l'étude sur un segment.

Exercice 24 : ($\star\star$)
Justfier et utiliser le fait que la borne supérieure sur $[a, b]$ est atteinte. Traiter les cas où elle est atteinte sur $]a, b[$ puis en a ou en b.

Exercice 25 : ($\star\star$)

1. Remarquer que $t \mapsto f(t) + xg(t)$ est continue sur un segment.
2. Pour la majoration, majorer $f(t) + (x+h)g(t)$ et pour la minoration, utiliser un point où $M(x+h)$ est atteint.
3. Appliquer la question précédente à un h bien choisi et faire un passage à la limite dans l'inégalité obtenue.

Exercice 26 : ($\star$)

1. Montrer que f est strictement décroissante, continue et étudier ses limites en 0 et 1.
2. Justifier que f^{-1} est continue et que $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0)$.
   Solution : $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 27 : ($\star$)

1. *Solution :* $f(\frac{1}{x}) = f(x)$
2. φ est continue, strictement décroissante donc est bijective de $]-1,1[$ vers $]\lim_1 \varphi, \lim_{-1} \varphi = \dots = \mathbb{R}$.
3. Faire deux cas : $]-1,1[$ et $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$.
   - Si $x \in]-1,1[$, alors $\varphi^{-1} \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$.
   - Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, alors $\varphi^{-1} \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ f(\frac{1}{x})$. Conclure en remarquant que $\frac{1}{x} \in]-1,1[$.

   Solution :
   $$\varphi^{-1} \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } |x| < 1 \\ \frac{1}{x} \text{ si } |x| > 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 28 : ($\star\star$)
Montrer que f est injective puis surjective.
Utiliser que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.