Indications du chapitre 12 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

I Ensemble de matrices

Exercice 1 :
Chercher $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et raisonner avec des coefficients indéterminés.
Solution : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :
Calculer A^2.
Solution : $a = 2t+1$, $b = -t^2 - t + 2$.

Exercice 3 : (⋆⋆)

1. Utiliser les symboles de Kronecker.
   Solution : $a_{i,r} b_{s,j}$
2. Raisonner par l'absurde et appliquer l'hypothèse à $X = E_{r,s}$ avec (r,s) bien choisi.

Exercice 4 : (⋆⋆)
Analyse : Supposons qu'il existe M telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$, alors pour tout $r, s \in [\![1, n]\!]$, $ME_{rs} = E_{rs}M$. Soient i, j $[\![1, n]\!]$, après calcul on a : $(ME_{rs})_{ij} = m_{i,r}\delta_{s,j}$ et $(E_{rs}M)_{i,j} = m_{s,j}\delta_{r,i}$ donc $m_{i,r}\delta_{s,j} = m_{s,j}\delta_{r,i}$.
Ces relations sont vraies pour tout r, s, i, j $[\![1, n]\!]$,
• pour $i \neq r$ et $s = j$, on a $m_{i,r} = 0$ donc M est diagonale,
• pour $i = r$ et $s = j$, on a $m_{i,i} = m_{j,j}$ donc $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Synthèse : ...
Solution : $\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$

Exercice 5 : (⋆⋆)

1. Utiliser la linéarité de la somme.
2. Utiliser une interversion de sommes.
3. Utiliser la définition de la trace pour se ramener à une somme de carrés.
4. Appliquer 3 à $(A-B)^T$.

II Opérations élémentaires

Exercice 6 : (⋆⋆) Utiliser l'algorithme du pivot de Gauss puis simplifier la matrice échelonnée réduite par ligne en effectuant des opérations sur les colonnes.

III Systèmes linéaires

Exercice 7 :

1. *Solution :* $\left\{(1 + \frac{5}{6}t, \frac{1}{2}t, -1 + \frac{7}{3}t, t),\ t \in \mathbb{R}\right\}$
2. *Solution :* $\emptyset$

Exercice 8 : *Solution :*

1. $\{(-1+7z, 4-11z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$ si $a = 2$, $\emptyset$ sinon,
2. $\left\{(-\frac{1}{9} + 5z, \frac{4}{9} - 2z, z, \frac{2}{9}),\ z \in \mathbb{R}\right\}$, si $a = \frac{4}{9}$, $\emptyset$ sinon.

Exercice 9 : (⋆)

1. *Solution :* $\{(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}t, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}t, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\}$ *si* $m = 5$
   $\emptyset$ *sinon*
2. *Solution :* $\left\{\left(\frac{m}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} - \frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$ *si* $m \notin \{1, -2\}$,
   $\{\left(-\frac{2}{3} + z, \frac{1}{3} + z, z, -\frac{2}{3}\right),\ z \in \mathbb{R}\}$ *si* $m = -2$,
   $\emptyset$ *si* $m = 1$

IV Ensemble des matrices carrées

Exercice 10 : (⋆⋆)
Remarquer que A^n est de la forme : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Le prouver par récurrence en utilisant $A^{n+1} = A^n.A$ et en déduire une relation de récurrence sur (u_n) prouvant qu'il s'agit

d'une suite arithmético-géométrique.

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 11 :

Appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer la puissance n, et ne conserver que trois termes.

Solution : $A^3 = 0$ *et* $(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$

Exercice 12 :

1. Poser $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et exprimer A en fonction de I_2 et N.

   Solution : $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

2. Remarquer que $A = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et appliquer la formule du binôme de Newton. *Solution :* $\begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 13 :

Ecrire $A = I + N$ et calculer N^3 puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Solution : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p(p+2) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 : (⋆⋆)

Poser $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et montrer que le système se ramène à $X_{n+1} = AX_n$ en choisissant bien la matrice A. Exprimer alors X_n en fonction de X_0 et de A^n.

Exprimer A en fonction de I_3 et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U^k = 3^{k-1}U$ si $k \geq 1$ puis utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n.

Solution : $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$

Exercice 15 : (⋆⋆)

Poser $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et exprimer $M_{a,b}$ en fonction de I_n et U. Utliser la formule du binôme de Newton et calculer les puissances de U.

Solution : $\frac{1}{n}\left((a-b+bn)^k - (a-b)^k\right)U + (a-b)^k I_n$

Exercice 16 :

Solution : le produit de deux matrices symétriques A, B est symétrique ssi $AB = BA$, le produit de deux matrices antisymétriques A, B est antisymétrique ssi $AB = -BA$.

Exercice 17 : (⋆⋆)

Raisonner par analyse-synthèse. La matrice symétrique est $\frac{1}{2}(M + M^T)$ et la matrice antisymétrique est $\frac{1}{2}(M - M^T)$.

V Matrices inversibles

Exercice 18 :

Remarquer que $A(A^{n-1} + A^{n-2}) = (A^{n-1} + A^{n-2})A = I_n$.

Solution : $A^{-1} = A^{n-1} + A^{n-2}$

Exercice 19 :

1. *Solution :* $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$
2. Se ramener à une expression de la forme $AB = I_3$.
   Solution : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$

Exercice 20 : (⋆⋆)

Montrer que $AB = I_n$ en remarquant que A et B sont triangulaires.

Exercice 21 : (⋆⋆)

Se ramener à $PA^T = AP$ et raisonner par coefficients indéterminés sur A et P.

Exercice 22 : (⋆⋆)

Raisonner par récurrence double et montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} - u_k$.

Solution : $u_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

Exercice 23 : (⋆⋆)

1. Raisonner comme dans l'exercice 4 en remarquant que $I_n + E_{r,s}$ est inversible.
2. Remarquer que, si B est inversible, $A = (AB^{-1})B$.

Exercice 24 :

Solution : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 : ($\star$)

1. Appliquer une des méthodes de calcul de l'inverse.

   Solution : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. D est une matrice diagonale, ses puissances n le sont également.

   Solution : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

3. On a $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Solution : Si n est impair, $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   et si n est pair $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 26 : ($\star$)

1. Appliquer une des méthodes de calcul de l'inverse.

   Solution : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. La matrice D est diagonale.

   Solution : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3. On a $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Solution : $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 3^n \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 1 + 3^n \end{pmatrix}$