Indications du chapitre 10 : Ensembles et applications

I Ensembles

Exercice 1 : (⋆⋆)

1. Il suffit de prouver l'inclusion $\mathbb{R} \subset \{x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\}$, l'autre inclusion étant évidente.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on veut montrer que : $\exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon$. Posons $\varepsilon = \dots$, (on pourra utiliser une valeur absolue), on montre que $\varepsilon > 0$ et que $x < \varepsilon$.
2. On raisonne par double inclusion.
   Pour montrer que $\{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\}$, il suffit de montrer que $x = 0$ vérifie $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$.
   Pour montrer que $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\} \subset \{0\}$, on va raisonner par l'absurde.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Supposons que $x \neq 0$. Posons $\varepsilon = \cdots > 0$, montrer que $|x| \geq \varepsilon$ ce qui est absurde.

Exercice 2 :

1. f_1 et f_2 sont paires.
   Solution : A est un sous-ensemble de E.
2. g_2 n'est pas paire.
   Solution : B n'est pas un sous-ensemble de E.
3. Soit $f \in C$. Prendre $x = y = 0$ pour montrer que $f(0) = 0$ puis $y = 0$ pour montrer que f est paire.
   Solution : C est un sous-ensemble de E.

Exercice 3 :
Raisonner par double inclusion pour montrer que $A = B$.

Exercice 4 : (⋆)
Prouver une implication en raisonnant par double inclusion.

Exercice 5 : (⋆⋆)
Raisonner par analyse-synthèse.
Solution : Si $B \not\subset A$, l'équation n'a pas de solution, sinon les solutions sont les X tels que $B \subset X \subset B \cup \overline{A}$.

Exercice 6 : (⋆)
Traduire "privé" en terme de complémentaire.
Trouver un contre-exemple pour prouver que l'inclusion réciproque est fausse.

Exercice 7 : (⋆⋆)
Raisonner par chaîne d'implications.

Exercice 8 : (⋆)

1. Utiliser la distributivité de la réunion et de l'intersection.
2. Calculer $\overline{A} \Delta \overline{B}$.
3. Raisonner par double implication et par double inclusion.

II Applications

Exercice 9 : (⋆)

1. Montrer que $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C$.
   Solution : $B = C$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_C$, en faisant attention à ne pas simplifier par des quantités pouvant être nulles.
   Solution : $B \subset C$.

Exercice 10 : (⋆)
Raisonner par équivalences et utiliser la définition de l'image réciproque.

Exercice 11 : (⋆)
Rechercher des contre-exemples.

Exercice 12 : (⋆)
Raisonner par double inclusion.
Soit $y \in f(f^{-1}(Y))$, alors il exsite $x \in f^{-1}(Y)$ tel que $y = f(x)$. En déduire, en utilisant deux arguments différents que $y \in Y$ et que $y \in f(E)$.
Soit $y \in Y \cap f(E)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En utilisant $y \in Y$, montrer que $x \in f^{-1}(Y)$ et conclure.

Exercice 13 : (⋆⋆)

1. Utiliser la définition de l'image.
2. Raisonner par double inclusion et utiliser la définition de l'image.
3. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)

4. Trouver un contre-exemple. (On peut utiliser la fonction carré.)

Exercice 14 : ($\star$)
Pour avoir l'intuition des résultats, utiliser le graphe de f.
Pour prouver les résultats, raisonner par double inclusion ou par équivalences.
Solution : $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, f([-1, 4]) = [0, 16], f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$, $f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4]$, $f^{-1}(f([-1, 4])) = [-4, 4]$.

III Injection, surjection, bijection

Exercice 15 : ($\star$)
Chercher des contre-exemples.
Solution : f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 16 : ($\star$)
Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$.
Solution : $f^{-1}(x, y, z) = (z, x, y)$.

Exercice 17 : ($\star\star$)

1. *Solution : f est injective et non surjective, g est surjective et non invective.*
2. *Solution :* $f \circ g : x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ *et* $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. *On en conclut que* $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ *ne suffit pas à prouver la bijectivité.*

Exercice 18 : ($\star\star$)
Montrer que $f(1,0) = f(1,1)$ et en déduire que f n'est pas injective.
Pour montrer la surjectivité, on utilise la définition.
Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ (ici, (X, Y) est vu comme un élément de l'ensemble d'arrivée).
Posons $x = X$ (on cherche x et y tels que $f(x, y) = (X, Y)$ c'est-à-dire $x = X$ et $xy - y^3 = Y$).
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto xy - y^3$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, que g est continue et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que g est surjective.
Ainsi, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = Y$.
Conclure en vérifiant que $f(x, y) = (X, Y)$.
Solution : f n'est pas injective et f est surjective.

Exercice 19 : ($\star\star$)

1. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   On a :
   $$f(z) = Z \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow z = i\frac{1+Z}{Z-1}.$$
   En déduire que f est bijective et la valeur de f^{-1}.
2.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+i}{x-i}$. En utilisant le module du conjugué, montrer que $|f(x)| = 1$. Ainsi : $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
   - Soit $Z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors, posons $z = f^{-1}(Z) = i\dfrac{1+Z}{Z-1}$. Alors $Z = f(z)$ et $z = i\dfrac{(1+Z)(\bar{Z}-1)}{|Z-1|^2}$. En utilisant que $Z\bar{Z} = |Z|^2 = 1$, montrer que $z \in \mathbb{R}$. Ainsi : $\mathbb{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$.
   - Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$. Alors $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{(z+i)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. En utilisant que $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, montrer que $f(z) \in i\mathbb{R}$. Ainsi $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R}$.
   - Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, posons $z = f^{-1}(iy) = i\dfrac{1+iy}{iy-1}$. Alors $iy = f(z)$ et montrer que $|z| = 1$. Ainsi $i\mathbb{R} \subset f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$.
   - Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $f(iy) = \dfrac{iy+i}{iy-i}$. Simplifier cette expression pour montrer que $f(iy) \in \mathbb{R}$. Donc $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   - Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors, posons $z = f^{-1}(X) = i\dfrac{1+X}{X-1}$. En déduire que $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

   Solution : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 20 : ($\star\star$) Raisonner par double implication en utilisant les définitions.

Exercice 21 : ($\star\star\star$)

1. Pour montrer que $A \cup B = E$ implique f injective, utiliser la définition de l'injectivité.
   Pour montrer que f injective implique $A \cup B = E$, calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.
2. Pour montrer que f surjective implique $A \cap B = \emptyset$, utiliser l'existence d'un antécédent de $(\emptyset, B)$.
   Pour montrer que $A \cap B = \emptyset$ implique f surjective, montrer que pour $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(C \cup D) = (C, D)$.
3. Utiliser les résultats précédents.
   Solution : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (C, D) & \mapsto & C \cup D \end{array}$.