Exercices du chapitre 9 : Equations différentielles

I Equations différentielles linéaire du premier ordre

Exercice 1 :
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}^{+*}$:

1. $$y' + \frac{1}{x} y = 0$$
2. $$y' - \frac{2}{x^3} y = 0$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' - y = \sin x.$$

Exercice 3 :
Résoudre les équations différentielles suivantes, en cherchant d'abord une solution évidente :

1. $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$,
2. $y' + y \sin x = \sin 2x$.

Exercice 4 :
Soit l'équation différentielle :

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1.$$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $]-1, +\infty[$.
3. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 5 : (⋆⋆)
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) f(-x) = 1.$$

Exercice 6 : (⋆)
Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que les deux équations différentielles $y' - y = 1 - x$ et $xy' - y = f(x)$ aient au moins une solution commune $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 7 : (⋆ ⋆ ⋆)
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 8 :
Résoudre :

$$y' + y = 2e^x + 4 \sin x + 3 \cos x$$

Exercice 9 : (⋆)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x' + x = \sin t + 3 \sin 2t$,
2. $(1+t^2)x' + x = \operatorname{Arctan} t$.

Exercice 10 :
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + 2y = x^2$
b. $y' - y = (x+1)e^x$

Exercice 11 :
Résoudre les équations différentielles :

1. $y' - xy = xe^{x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$ sur $]0, 1[$,
3. $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 : (⋆)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ sur $]1, +\infty[$
b. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 13 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x \ln x) y' - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) \text{ sur }]1, +\infty[$$

II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Exercice 14 :
Résoudre les équations suivantes :
1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$
4. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$
5. $y'' - y' + (1+i)y = 0$

Exercice 15 : ($\star\star$)
Déterminer l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution sur $]0,+\infty[$ de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Exercice 16 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation suivante sur $]-1,1[$:

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

On pourra poser $x = \sin t$.

Exercice 17 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 2xy' + x^2 y = 0.$$

On pourra poser $z = e^{x^2/2} y$.

Exercice 18 : ($\star\star$)
Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + m^2 y = 0.$$

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. On pourra poser $x = \tan t$.
Préciser les solutions dans le cas particulier où $m = 2$.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

On pourra poser $z = xy$.

Exercice 20 : ($\star$)
Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 21 : ($\star\star$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\alpha - x).$$

Exercice 22 :
Résoudre les équations suivantes :
1. $y'' - 4y' + 4y = e^x$,
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,
3. $y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$,
4. $y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$

Exercice 23 : ($\star\star$)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1.$$

Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$. On pourra poser $z = x^2 y$.

Exercice 24 : ($\star\star$)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2.$$

Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$. On pourra poser $x = e^t$.

Exercice 25 :
Résoudre :

$$y'' + y = \cos^3 x.$$

Exercice 26 : ($\star$)
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = 2\operatorname{sh} x.$$

Exercice 27 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation différentielle suivante, avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} + e^x \sin x.$$