

## I Inégalités dans $\mathbb{R}$

### Exercice 1 : (★)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls, distincts et de même signe. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

### Exercice 2 :

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x-4} - \sqrt{2x-3} < 0.$$

## II Valeur absolue

### Exercice 3 : (★)

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les équations ou inéquations suivantes :

$$1. |2x-4| = |x-1| \qquad 2. \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2$$

### Exercice 4 : (★)

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|x+3| - |x-1| = |2x+1|.$$

### Exercice 5 : (★★)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}} + \sqrt{x+9-6\sqrt{x}} = 1.$$

### Exercice 6 : (★★)

Soient  $x, m \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$x \geq m \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 1+2|m|+x.$$

### Exercice 7 : (★★)

1. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux réels positifs tels que  $x \geq y$ , alors :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ et } \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. En déduire que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

et  $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$

### Exercice 8 : (★★)

Montrer que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|,$$

$$1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|).$$

## III Majorations, minorations

### Exercice 9 :

Montrer que la fonction  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  n'est pas majorée.

## IV Partie entière

Exercice 10 :  Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2.$$

Exercice 11 : (★) Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor.$$

Exercice 12 : (★) 

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$