PCSI 1 — 2024/2025

Exercices du chapitre 4 : Trigonométrie

I Cercle trigonométrique

Exercice 1 : $(\star)$
En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Exercice 2 : $(\star)$
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2 \leq \cos x + \sqrt{3}\sin x \leq 2.$$

Exercice 3 : $(\star\star)$
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin(nx)| < n|\sin x|.$$

II Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 4 :
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0.$$

Exercice 5 : $(\star)$
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1.$$

Exercice 6 : $(\star)$
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(3x) + \sin x = 0.$$

Exercice 7 : $(\star\star)$
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

Exercice 8 :
Résoudre les inéquations suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos x > 0$,
2. $\sin x \leq \frac{1}{2}$,

III Fonctions cosinus et sinus

Exercice 9 : Etudier et tracer la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x.\sin 2x - 2\sin x \end{array}$$

Exercice 10 : $(\star)$ Etudier et tracer la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\sin x + \sin(2x) \end{array}$$

Exercice 11 : $(\star\star)$ Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \sin^2 x - \sqrt{2}\cos x.$$

Exercice 12 : $(\star\star)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\cos^n(x). \end{array}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f_n peut se mettre sous la forme :

   $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$

   où g_n est une fonction dont on déterminera l'expression.
2. Etudier les variations de g_n.
3. Montrer que f_n admet un maximum.

IV Tangente

Exercice 13 : (⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \tan(2x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{2 + \cos^3(2x)}{\cos^2(2x)}.$$

5. Etudier et tracer f.

Exercice 14 : (⋆⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Etudier et tracer f.

Exercice 15 : (⋆ ⋆ ⋆)
Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos x}.$$

On étudiera la dérivabilité de f en 0.

V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Exercice 16 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 17 : (⋆)
Etudier $f : x \mapsto \mathrm{ch}\,(3x) - 3\mathrm{ch}\,(x)$.

Exercice 18 : (⋆⋆)

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}\,(x) = 2.$$

2. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}\,(x) \leq 2.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}\,(x) = 2.$$

4. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}\,(x) \leq 2.$$

Exercice 19 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b),\ \mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b),$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b),\ \mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b),$$

$$\mathrm{ch}\,(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a,\ \mathrm{sh}\,(2a) = 2\mathrm{ch}\, a\,\mathrm{sh}\, a.$$

Exercice 20 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que la fonction f suivante est bijective :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \mathrm{ch}\, x. \end{array}$$

On note argch sa bijection réciproque.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \mathrm{argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

2. (a) Montrer que la fonction sh est bijective.
On note argsh sa bijection réciproque.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

VI Fonctions circulaires réciproques

Exercice 21 : ($\star$)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\mathrm{Arctan}\,|x|.$$

Exercice 22 : ($\star\star$)
Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \mathrm{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 23 : ($\star\star$)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{1+x^2}-x) + \mathrm{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 24 : ($\star\star$)
Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1],\ \mathrm{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\mathrm{Arcsin}\,x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{Arccos}\,x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 25 : ($\star$)
Etudier les variations des fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :

1. $f_1(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$,
2. $f_2(x) = (x-1)^2\mathrm{Arctan}\,x$,

Exercice 26 : ($\star$)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathrm{Arctan}\,x > \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 27 : ($\star\star$)
On pose :

$$f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\,\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la périodicité et la parité de f.
3. Soit $x \in]0,\pi[$, exprimer $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ en fonction de $\frac{x}{2}$.
4. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]0,\pi[$.
5. Tracer f sur $]-3\pi, 3\pi[$.
6. Calculer $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercice 28 : ($\star$)
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(4\mathrm{Arctan}\,x)$,
2. $\sin(3\mathrm{Arctan}\,x)$.

Exercice 29 : ($\star\star$)
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $xy \neq 1$, montrer que :

$$\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y = \mathrm{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy} + k\pi,$$

où :

- $k = 0$ si $xy < 1$,
- $k = 1$ si $xy > 1$ et $x > 0$,
- $k = -1$ si $xy > 1$ et $x < 0$.

Exercice 30 : ($\star\star$)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arcsin}\,2x$,
2. $2\mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arcsin}\,(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 31 : ($\star\star$)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,2x = \frac{\pi}{4}$,
2. $\mathrm{Arcsin}\,2x = \mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}\,(\sqrt{2}x)$.

Exercice 32 : ($\star\star$)
Montrer la formule de Machin :

$$4\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$